

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月24日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740022

研究課題名（和文）リジッド幾何学と p 進代数群の調和解析を用いた局所ラングランズ関手性の研究

研究課題名（英文）Study of the local Langlands functoriality via rigid geometry and harmonic analysis on p -adic algebraic groups

研究代表者

三枝 洋一 (MIEDA YOICHI)

九州大学・大学院数理学研究院・助教

研究者番号：70526962

研究成果の概要（和文）：

リジッド空間や、その一般化である adic 空間のエタールコホモロジーに関する基礎研究を行い、Lefschetz 跡公式、底が一般の場合の比較定理、および形式隣接輪体関手の一般化についての結果を得た。また、これらをシンプレクティック群 $\text{GSp}(4)$ に対する Rapoport-Zink 空間に適用することで、

- $\text{GSp}(4)$ とその内部形式の Jacquet-Langlands 対応（これは局所ラングランズ関手性の一種である）が Rapoport-Zink 空間のコホモロジーの交代和に現れること
- Rapoport-Zink 空間の i 次コホモロジーに $\text{GSp}(4)$ の超尖点表現が現れるのは、 $i=2,3,4$ のいずれかの場合に限ること

の2つを証明した。前者の証明には、 p 進代数群上の調和解析も有効に用いられる。

また、上記の研究で用いた手法を Lubin-Tate 空間や Drinfeld 空間という古典的な場合に適用することで、 $\text{GL}(n)$ (n は素数) の局所 Jacquet-Langlands 対応の純局所的な証明などの結果を得た。

これらの結果は、局所ラングランズ関手性の幾何学的研究において重要な一歩となることが期待できる。

研究成果の概要（英文）：

I worked on general theory of etale cohomology of rigid spaces and more generally, adic spaces, and obtained results on the Lefschetz trace formula, the comparison theorem in the case of general basis, and generalization of formal nearby cycles. Applying these results to the Rapoport-Zink space for the symplectic group $\text{GSp}(4)$, I have proved the following:

- The local Jacquet-Langlands correspondence between $\text{GSp}(4)$ and its inner form, which is a kind of the local Langlands functoriality, appears in the alternating sum of the cohomology of the Rapoport-Zink space.
- A supercuspidal representation appears in i -th cohomology of the Rapoport-Zink space only if $i=2,3,4$.

In the proof of the former result, harmonic analysis on p -adic algebraic groups was used effectively.

By adopting methods used in the research above to the classical case such as the Lubin-Tate space and the Drinfeld space, we got some results for $\text{GL}(n)$. For example, I found a purely local proof of the local Jacquet-Langlands correspondence for $\text{GL}(n)$ for prime n .

These results are expected to be an important step in the geometric study of the local Langlands functoriality.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
 科研費の分科・細目：数学・代数学
 キーワード：数論幾何学

1. 研究開始当初の背景

局所ラングランズ関手性予想とは、非アルキメデス局所体 K 上の簡約代数群の許容表現や、 K の絶対 Galois 群の表現 (Galois 表現) の間に、 L 群と呼ばれるもので統制される種々の対応が存在するであろうという予想である。局所ラングランズ関手性予想はそれ自身が数論・表現論・代数幾何の交叉点に位置する興味深い問題であると同時に、その幾何学的類似 (幾何学的局所ラングランズ対応) の研究を通じて数理物理とも深い関わりを持ち、さらには現代数学における最も大きな難問の一つである大域ラングランズ関手性 (いわゆるラングランズ対応はこれに含まれる) の解決へのステップともなる重要な予想である。

簡約代数群が $GL(n)$ である場合には、Lubin-Tate 空間のエタールコホモロジーを用いることで、局所ラングランズ対応や局所 Jacquet-Langlands 対応などのラングランズ関手性が幾何学的に実現されることが Harris, Taylor によって証明されている。より一般の簡約代数群に対しても、これと類似したことが成り立つと推測されているが、それが実際に確認されているケースは極めて少なく、より詳細な研究が待たれているところであった。

2. 研究の目的

この研究の目的は、

- ・リジッド空間 (複素解析空間の非アルキメデス版) におけるエタールコホモロジーの理論
- ・ p 進代数群の表現論、特に調和解析に関する理論

の 2 つを効果的に組み合わせて、Rapoport-Zink 空間と呼ばれるリジッド空間の 1 進エタールコホモロジーを計算すること

で、局所ラングランズ関手性を幾何学的に理解することである。Rapoport-Zink 空間とは、構造付き p 可除群のモジュライ空間として得られるリジッド空間であり、志村多様体の局所的類似と見ることができる。そのコホモロジーには 2 つの p 進簡約代数群 G, J が作用するので、これらの群の作用でコホモロジーを分解することで G と J の表現の間の対応が構成できる。Rapoport-Zink 空間の幾何学を調査することで、この対応に関する情報を引き出すことが研究の主な目標である。

3. 研究の方法

$GL(n)$ に対する既存の研究から考えて、Rapoport-Zink 空間のコホモロジーを研究する際の戦略としては、

- ・志村多様体や保型表現論を用いる大域的な方法
- ・リジッド幾何や局所体上の表現論を用いる局所的な方法

の 2 つが挙げられる。本研究では、主に後者を採用する。より具体的には、リジッド空間に対する Lefschetz 跡公式の理論を整備し、それを Rapoport-Zink 空間に適用することで、2 つの群 G と J の表現の対応がどのような指標の関係式を満たすかを調べる。古典的な場合と異なり、一般の Rapoport-Zink 空間のコホモロジーは巨大になるため、それをうまく扱うために p 進簡約代数群の調和解析を併用する。

研究を円滑に行うため、国内外の専門家との研究打合せや、国際研究集会での資料収集を積極的に行う。

4. 研究成果

- (1) リジッド空間のエタールコホモロジーの一般論

まず、Rapoport-Zink 空間のコホモロジーの

交代和を調べる際の中心的な道具となる Lefschetz 跡公式を証明し、プレプリント

Yoichi Mieda, Lefschetz trace formula for open adic spaces

にまとめた. この研究においては, まず準コンパクトかつスムーズなリジッド空間に対し, 普遍コンパクト化の境界上に固定点がないという条件のもとで Lefschetz 跡公式を証明した. さらにそれを用いて, ある条件を満たす形式スキームの一般ファイバーとして得られるリジッド空間 (これは必ずしも準コンパクトではない) に対する Lefschetz 跡公式を導いた. 特に後者の結果は, 多くの Rapoport-Zink 空間に適用できると期待される.

また, Rapoport-Zink 空間の「境界」(これは通常の意味でのリジッド空間ではない) を研究するという動機のもとで, 形式隣接輪体関手を一般化するという問題に取り組んだ. その成果が, 論文

Yoichi Mieda, Comparison results for étale cohomology in rigid geometry, to appear in Journal of Algebraic Geometry およびプレプリント

Yoichi Mieda, Variants of formal nearby cycles

である. 前者においては, 一般の底の場合にスキームとリジッド空間のエタールコホモロジーを比べる比較予想についても考察している. また, 後者の結果は(2)で述べる Rapoport-Zink 空間の非尖点性の証明において本質的に用いられた.

(2) $\mathrm{GSp}(4)$ の Rapoport-Zink 空間

本研究の主目的は Rapoport-Zink 空間のエタールコホモロジーの調査であるが, 一般の代数群に対する Rapoport-Zink 空間を考察するには様々な困難がある. そのため, サイズが小さく比較的扱いやすい, シンプレクティック群 $\mathrm{GSp}(4)$ に対応する Rapoport-Zink 空間について考察を行った. この空間に関する幾何学的な研究はこれまでも盛んに行われてきたが, コホモロジーについての研究は初めての試みであった.

まず, (1)で得られた Lefschetz 跡公式を適用することで, コホモロジーの交代和に L パケットのレベルで局所 Jacquet-Langlands 対応 (局所ラングランズ関手性の一種) が現れることが確認できた. L パケットの中のどの表現が現れるかについてのより精密な記述を行うことは重要な研究課題であるが, それは p 進 Hodge 理論と安定共役の理論がどのようにつながっているかという, より代数的な問題に言い換えられることを明らかにした. 言い換えた後の問題については, Matthias Strauch 氏 (インディアナ大学) と

協力して研究を進めている.

Lefschetz 跡公式を用いた方法は, コホモロジーの交代和をとるため, どの次数にどの表現が現れるかという情報が失われてしまう. これを補うために, 伊藤哲史氏 (京都大学) と共同で, $\mathrm{GSp}(4)$ の Rapoport-Zink 空間のコホモロジーのうち, 超尖点表現が現れるのは 2 次, 3 次, 4 次に限るということ (非尖点性) を証明し, プレプリント

Tetsushi Ito and Yoichi Mieda,

Cuspidal representations in the l -adic cohomology of the Rapoport-Zink space for $\mathrm{GSp}(4)$

にまとめた. 方針は, Lubin-Tate 空間に対する類似の結果

Yoichi Mieda, Non-cuspidality outside the middle degree of l -adic cohomology of the Lubin-Tate tower, Advances in Mathematics 225 (2010), 2287--2297

の証明を拡張するという自然なものであるが, $\mathrm{GSp}(4)$ の Rapoport-Zink 空間が巨大であるため, 様々な新しい困難が発生した. それらを回避するために, (1)で述べた形式隣接輪体の一般化や, p 進代数群の表現論などが駆使された. この非尖点性は, 今後実施する予定のより精密な研究における出発点となる予定である.

(3) $\mathrm{GL}(n)$ の場合へのフィードバック

p 進群の調和解析と Lefschetz 跡公式を組み合わせるというアイデアは, Lubin-Tate 空間や Drinfeld 空間という古典的な Rapoport-Zink 空間の研究にも有効であることが判明した. Lubin-Tate 空間に Lefschetz 跡公式を適用する研究は既に Strauch によってなされていたが, 論文

Yoichi Mieda, Lefschetz trace formula and l -adic cohomology of Lubin-Tate tower, Mathematical Research Letters 19 (2012), 95--107

においては, さらに調和解析的な手法を導入することで, Strauch の手法では得られない情報 (例えば, 超尖点的でない離散系列表現のコホモロジーへの寄与について) が得られることを示した. また, プレプリント

Yoichi Mieda, Geometric approach to the local Jacquet-Langlands correspondence においては, 同様の手法を Drinfeld 空間に適用することで, 局所 Jacquet-Langlands 対応を幾何学的方法で構成するという問題に進展を与えた. 特に, n が素数で, 斜体 D の Hasse 不変量が $1/n$ である場合には, $\mathrm{GL}(n)$ と D^\times の間の局所 Jacquet-Langlands 対応に純局所的な別証明を与えることができた.

この証明法は, 法 l 表現の場合などにも有効

であることが期待できる。

(4) 大域的理論の応用に向けて

(1)~(3)で述べてきた研究は、全て純局所的な手法によるものであった。純局所的な手法は見通しがよく、定性的な結果を得る際には非常に有効であるが、定量的な結果、例えば Rapoport-Zink 空間のコホモロジーにどのような表現が実際に現れるのかを決定するというような問題を考える際には、保型表現論や志村多様体論などの大域的な手法も合わせて用いる必要がある。大域的な手法を適用するための準備として、今井直毅氏（京都大学）と共同で、コンパクトとは限らない PEL 型志村多様体の隣接輪体コホモロジーとコンパクト台コホモロジーを比較する研究を行い、これら2つのコホモロジーの超尖点部分が同型になることを証明した。p 進一意化の理論を通して Rapoport-Zink 空間と繋がるのは隣接輪体コホモロジーであり、その一方、保型表現論と深く関わりがあるのはコンパクト台コホモロジー（あるいは交叉コホモロジー）であるため、これら2つを比較することは保型表現論の応用のために必要不可欠である。この研究はプレプリント

Naoki Imai and Yoichi Mieda,
Compactly supported cohomology and nearby cycle cohomology of open Shimura varieties of PEL type

にまとめられている。

この定理と大域的な手法、および前述の非尖点性を組み合わせることで、例えば $\mathrm{GSp}(4)$ の Rapoport-Zink 空間の4次コホモロジーに超尖点表現が現れることが証明できる。より詳しい研究も現在進行中であり、様々な面白い現象が発見されつつある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① Yoichi Mieda, Non-cuspidality outside the middle degree of l -adic cohomology of the Lubin-Tate tower, *Advances in Mathematics* 225 (2010), 2287--2297, 査読有。
- ② Yoichi Mieda, Lefschetz trace formula and l -adic cohomology of Lubin-Tate tower, *Mathematical Research Letters* 19 (2012), 95--107, 査読有。
- ③ Yoichi Mieda, Comparison results for étale cohomology in rigid geometry, *Journal of Algebraic Geometry* に採録決定済, 査読有。

[学会発表] (計24件)

- ① 三枝 洋一, Adic 空間のエタールコホモロジーについて, 第54回代数学シンポジウム, 明治大学リバティタワー, 2009年8月5日。
- ② 三枝 洋一, Adic 空間における隣接輪体関手, 代数的整数論とその周辺, 東京大学数理科学研究科, 2009年12月7日。
- ③ Yoichi Mieda, Cuspidal representations in the l -adic cohomology of the Rapoport-Zink space for $\mathrm{GSp}(4)$, Workshop on Arithmetic Geometry and Related Topics, National Taiwan University (台湾), 2010年7月14日。
- ④ Yoichi Mieda, Lefschetz trace formula and l -adic cohomology of the Rapoport-Zink spaces for $\mathrm{GSp}(4)$, The Third PanAsian Number Theory Conference (PANT-Beijing 2011), Morningside Center of Mathematics, Chinese Academy of Sciences (中国), 2011年8月22日。
- ⑤ Yoichi Mieda, Supercuspidal representations in l -adic cohomology of the Rapoport-Zink tower for $\mathrm{GSp}(4)$, East Asia Number Theory Conference, National Taiwan University (台湾), 2012年1月18日。

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]

ホームページ等
www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mieda/index.html

6. 研究組織

(1)研究代表者

三枝 洋一 (MIEDA YOICHI)

九州大学・大学院数理学研究院・助教

研究者番号：70526962

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()

研究者番号：