様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年４月１３日現在

機関番号：２２６０４
研究種目：若手研究（B）
研究期間：２００９～２０１１
課題番号：２１７４００２６
研究課題名（和文）多項式環の研究：効果的手法の確立とその応用

研究課題名（英文）Study of polynomial rings: establishment of effective methods and their applications

研究代表者
黒田 茂（Shigeru Kuroda）
首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：70453032

研究成果の概要（和文）：多項式環の自己同型は，多項式環論（アフィン代数幾何学）における主要な研究対象の一つである．2003 年に Shestakov-Umirbaev は，3 変数多項式環の自己同型に関して画期的な理論を発表し，長い間未解決だった「永田予想」を解決した．本研究はこの流れを引き継ぎ，3 変数多項式環の自己同型を分析するための有用で強力な手法を確立するとともに，それを応用して様々な興味深い定理を証明した．

研究成果の概要（英文）：Automorphisms of a polynomial ring are one of the main objects of study in Polynomial Ring Theory (Affine Algebraic Geometry). In 2003, Shestakov-Umirbaev published an epoch-making theory on automorphisms of a polynomial ring in three variables, and solved Nagata's conjecture which was open for a long time. Following the study of Shestakov-Umirbaev, we establish a useful and powerful method for analyzing automorphisms of polynomial rings in three variables, and proved various interesting theorems as applications.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２０１０年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１１年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：可換環論、多項式環論、アフィン代数幾何学、多項式自己同型

１．研究開始当初の背景

多項式環は数学で基本的な対象だが，その深い性質はまだあまり解明されていない．多項式環の周辺には数々の極めて難解な未解決問題があり，「多項式環論（アフィン代数幾何学）」として組織的な研究が行われている．多項式環の自己同型は，多項式環に関する様々な問題に現れる重要な研究対象である．しかし，多項式環の自己同型の扱いは非常に難しく，特に 3 変数以上の場合には不明な部分が多く残っている．多項式環の自己同型は，ある簡単な形の自己同型（**基本自己同型**）を合成して構成できるとき**順**(tame)であるといい，そうでないとき**野生**(wild)である

という．“Tame Generators Problem”は，野生自己同型が存在するかどうかを問う問題である．2 変数以下の場合は 1950 年代に解決しているが，3 変数以上の場合は非常に難しい．永田雅宜は，3 変数の野生自己同型の存在を予想し，具体的な候補を与えた．この予想は，多くの数学者たちに知られていたにもかかわらず，長い間未解決だった．しかし，2003 年に Shestakov と Umirbaev は全く新しい理論を発表し，永田の自己同型を含むいくつかの自己同型が野生であることを証明した．この結果は多くの研究者に衝撃を与えたが，彼らの理論は従来の様式と大きく異なっているため，専門家の間でもあまり理解が進んでいない．こうした事情もあり，永田予想解決後の自己同型の研究は，十分な発展を遂げていなかった．

２．研究の目的

多項式環の問題が難しい大きな原因は，多項式環を研究するために有効な手法が確立されていないことにある．しかし，一旦しかるべき手法が確立されれば，それを用いて非常に多くの結果を得ることができる．従って，多項式環の研究では，効果的な手法の開発が特に重要である．これは，多項式環の自己同型の研究にも当てはまる．

究研究代表者は，これまで多項式環に関する独自の研究を展開してきており，強力な手法をいくつも編み出してきた．それらの中には Shestakov と Umirbaev の手法に似たものもある．こうした有利な条件を活かし，研究代表者は Shestakov-Umirbaev 理論の改良などをいち早く進めてきた．

本研究の大きな目標は，こうした研究を踏まえ，永田予想解決後の自己同型研究を一定の完成段階に導くことである．そのために，主に多項式環の自己同型を研究するために有効な手法を開発する．また，それを実際に応用し，多項式環の自己同型の順性や野生性などに関する高度な研究を行う．

多項式環の自己同型は，多項式環論における様々な問題と密接な関係があり，いわば多項式環論の要である．そのため，今後，多項式環の研究を優位に進める上でも，自己同型の研究で国際的な主導権を握ることは重要である．本研究は，今後の展開も見越しながら，Shestakov-Umirbaev 理論を基礎に置く最先端の研究を世界に先んじて行い，この領域における地歩を固めることも狙う．

３．研究の方法

(1) 研究代表者が構築した「一般化された Shestakov-Umirbaev 理論」は，Shestakov と Umirbaev の元の理論に比べて格段に使い易く実用的である．そこで，自己同型の順性や野生性を調べるために，この理論をしばしば活用した．自己同型の順性や野生性を判定するためのソフトウエアを開発する際にも，この理論を使った．

Shestakov-Umirbaev 理論のある重要な系を用いることで，一つの変数を固定する 3 変数多項式環の自己同型の研究が，1 変数多項式環上の 2 変数多項式環の自己同型の研究に帰着できる．この点に着目し，より一般に整域上の 2 変数多項式の自己同型に関する研究も行った．

(2) 3 変数多項式環の自己同型の分類理論はまだ存在しないので，どのような自己同型があるのかよく分かっていない．そのため，多項式環の自己同型の新しい例を構成することは重要な課題である．

多項式環における局所冪零導分に対し，**指数自己同型**と呼ばれる自己同型が定義される．この方法で新しい自己同型を構成するには，新しい局所冪零導分を構成する必要がある．このことを踏まえ，自己同型の新しい例を構成するために，局所冪零導分に関する研究も行った．

一般に，変数変換の差は無視されることが多いが，Tame Generators Problem の研究では変数変換は意味深長である．実際，非常に簡単な順自己同型が，変数変換で野生自己同型になることもある．そこで，「新しい」自己同型を作るために，既知の自己同型に変数変換を施すという方法も用いた．

(3) 国内の多項式環論の研究者たちと情報交換や議論を行うため「多項式環論セミナー」を開催した．また，「アフィン代数幾何学研究集会」の開催にも協力した．

国際的な協力関係を構築するために，多項式環論の研究に取り組んでいる海外の研究者を訪問し，共同研究を行った．国内外の研究集会に参加し，効果的なプレゼンテーションによって研究成果を広く公表した．

４．研究成果

多項式環の自己同型の順性や野生性を判定する問題は，多くの研究者が興味を持っている重要な問題である．特に，野生自己同型に対する関心は根強く，野生自己同型を扱った論文は近年数多く出版されている．

Shestakov-Umirbaev 理論を用いると，標数 0 の体上の 3 変数多項式環のどのような自己同型ϕでも，原理的に順であるか野生であるか判定できる．しかし，そのためにはϕを定める多項式$\phi(x_1)$，$\phi(x_2)$，$\phi(x_3)$を具体的に調べなければならない．この手続きはそれほど簡単でなく，実際に野生であることが確認されたのは，いくつかの具体的な場合に限られていた．

本研究では，「順交叉」という新しい概念を導入し，自己同型の野生性を証明するための非常に強力な手法を確立した．この手法は，

$\phi(x_1)$，$\phi(x_2)$，$\phi(x_3)$が明示的に与えられていないような場合でも使うことができる．また，多くの自己同型の野生性を一度にまとめて証明することもできる．そのため，実際に応用する上で非常に有効である．

「順交叉」の手法のアイディアは以下の通りである．一般に，$k[\underline{\mathbf{x}}]:=k[x_1,\cdots,x_n]$を体 k 上の n 変数多項式環，$\mathrm{Aut}_k k[\underline{\mathbf{x}}]$を $k[\underline{\mathbf{x}}]$の k 上の自己同型群とする．$k[\underline{\mathbf{x}}]$の k 部分代数 A に対し，$k[\underline{\mathbf{x}}]$の A 上の自己同型群（A の元を固定する自己同型全体）$\mathrm{Aut}(k[\underline{\mathbf{x}}]/A)$を考える．これは，$\mathrm{Aut}_k k[\underline{\mathbf{x}}]$の部分群になる．一方，$k[\underline{\mathbf{x}}]$の順自己同型全体 $\mathrm{T}(\underline{\mathbf{x}},k)$も $\mathrm{Aut}_k k[\underline{\mathbf{x}}]$の部分群である．これらの共通部分

$$\mathrm{Aut}(k[\underline{\mathbf{x}}]/A)\cap\mathrm{T}(\underline{\mathbf{x}},k)$$

を**順交叉**と呼ぶ．実は，Shestakov-Umirbaev 理論やその一般化は，この順交叉の構造を調べるのに適している．$\mathrm{Aut}(k[\underline{\mathbf{x}}]/A)\cap\mathrm{T}(\underline{\mathbf{x}},k)$の構造が分かると，$k[\underline{\mathbf{x}}]$の A 上の自己同型が野生であるための**十分条件**が得られる．実際，$\phi\in\mathrm{Aut}(k[\underline{\mathbf{x}}]/A)$に対し，$\phi$が野生であることと，$\mathrm{T}(\underline{\mathbf{x}},k)$に属さないことは同じである．これは，$\phi$が順交叉 $\mathrm{Aut}(k[\underline{\mathbf{x}}]/A)\cap\mathrm{T}(\underline{\mathbf{x}},k)$に属さないことと同値である．従って，順交叉の構造を調べることは，$\mathrm{Aut}(k[\underline{\mathbf{x}}]/A)$の元が野生であるための十分条件を与えることに他ならない．$\mathrm{Aut}(k[\underline{\mathbf{x}}]/A)$に比べて順交叉が小さければ，$\mathrm{Aut}(k[\underline{\mathbf{x}}]/A)$はたくさんの野生自己同型を含むことになる．実際に色々な種類の A について順交叉を調べた結果，そのような場合は珍しくないことが判明した．

順交叉の手法は，特に指数自己同型の野生性の研究に有効である．k の標数は 0 であるとし，Dを $k[\underline{\mathbf{x}}]$における局所冪零導分とする．このとき，**指数自己同型** $\exp D\in\mathrm{Aut}_k k[\underline{\mathbf{x}}]$が

$$(\exp D)(f)=f+D(f)+D^2(f)/2!+\cdots$$

で定義される．D をうまく選ぶことで，様々な興味深い自己同型を $\exp D$ の形で構成できる．そのため，指数自己同型の研究は重要である．しかし，D が具体的に与えられた場合でも，$(\exp D)(x_i)$たちの形は一般によく分からない．そのため，Shestakov-Umirbaev 理論を素朴に適用する方法では，指数自己同型の野生性の研究は事実上不可能である．

ところで，$\exp D$は常に $\ker D$ 上の自己同型である．従って，$\exp D$の野生性の研究は，順交叉

$$\mathrm{Aut}(k[\underline{\mathbf{x}}]/\ker D)\cap\mathrm{T}(\underline{\mathbf{x}},k)$$

の研究に帰着される．局所冪零導分の核の構造の研究は進んでいるため，この手法を用いて $\exp D$の野生性の解明が一挙に進展した．

一般に，導分 Dが局所冪零ならば，各 $f\in\ker D$に対して導分 fDは局所冪零になる．しかし，$\exp D$ が順でも，$\exp fD$ は順であるとは限らない．逆に，$\exp fD$が順であるような $0\neq f\in\ker D$が存在するとき，$\exp D$が常に順であるかどうか明らかでないが，$\exp D$ が野生であるような例も知られていない．我々は，$n=3$ で $D(x_1)=0$ のとき，$\exp fD$が順であるような $0\neq f\in\ker D$が存在するならば，$\exp D$は常に順であることを証明した．

$k[\underline{\mathbf{x}}]$の導分 Dは

$$D(x_i)\in k[x_1,\cdots,x_{i-1}]\ (i=1,\cdots,n)$$

を満たすとき，**三角**であるという．このとき，Dは局所冪零であり，$\exp D$は順である．しかし，Dが三角でも，何らかの $0\neq f\in\ker D$に対し，$\exp fD$ が野生になる場合があることはよく知られている．そのため，f と Dがどのような場合に $\exp fD$が順であるかが問題になる．我々は $n=3$ の場合に，この問題を完全に解決した．

$k[\underline{\mathbf{x}}]$の導分 Dが**三角化可能**であるとは，導分 $\phi D\phi^{-1}$ が三角であるような $\phi\in\mathrm{Aut}_k k[\underline{\mathbf{x}}]$が存在するときにいう．このとき，$\phi$が順ならば $\exp D$ も順だが，ϕが野生のとき，$\exp D$は順であるとは限らない．フロイデンバーグは，逆に $\exp D$が順ならば，Dは常に三角化可能か？という問題を提起した．この問題は，n が 2 以下の場合は肯定的に，n が 4 以上の場合は否定的に，それぞれ解決している．そして，$n=3$ の場合だけ未解決だった．我々は $n=3$ で $D(x_1)=0$ のとき，$\exp D$が順であるための必要十分条件は，$\phi D\phi^{-1}$が三角であるような $\phi\in\mathrm{T}(\underline{\mathbf{x}},k)$が存在することであることを証明した．従って，$n=3$ のとき，$D(x_1)=0$ならばフロイデンバーグの問題の答えは肯定的である．

$k[\underline{\mathbf{x}}]$の導分 Dに対し，**階数** $\mathrm{rank}D$の概念が定義される．$\mathrm{rank}D$は 0 以上 n 以下の整数で，$\mathrm{rank}D$が大きいほど Dの扱いは難しくなる．$n=3$ のとき，階数 3 の局所冪零導分の存在は 1990 年代の後半に明らかになったが，数種の具体例が知られているに過ぎず，未解明な部分が多く残されている．本研究では，階数 3 の局所冪零導分の新しい例を大量に構成し，それらについて $\exp D$ が常に野生であることを証明した．我々の構成では Dが明示的に与えられていないため，$\exp D$に関する情報は極めて限定的である．そのため，$\exp D$の野生性の判定は著しく困難である．しかし，順交叉の手法の発展形である「W テスト多項式」の手法を用いることで，$\exp D$の野生性を明快に証明した．

順交叉に関する次のような強い結果も得た．一般に，n 個の多項式 $y_1,\cdots,y_n\in k[\underline{\mathbf{x}}]$は $k[y_1,\cdots,y_n]=k[\underline{\mathbf{x}}]$を満たすとき，$k[\underline{\mathbf{x}}]$の**座標系**と呼ばれる．我々は，$n=3$ のとき，

$$\mathrm{Aut}(k[\underline{\mathbf{x}}]/k[y_1])\cap\mathrm{T}(\underline{\mathbf{x}},k)=\{\mathrm{id}\}$$

を満たす $k[\underline{\mathbf{x}}]$の座標系 y_1,y_2,y_3を組織的に構成した．この場合，$\phi(y_1)=y_1$を満たす任意の自己同型 $\phi\neq\mathrm{id}$は野生である．例えば，

$$\phi(y_1)=y_1,\ \phi(y_2)=y_2,\ \phi(y_3)=-y_3$$

から定まる自己同型は，y_1を固定するので野生である．y_1を固定するだけでよいので，こ

のような自己同型は無数に存在する．

現在，専門家の間でも，野生自己同型は希少な存在として扱われることが少なくない．そうした状況において，本研究は様々な自己同型が野生であることを鮮やかに解明した．本研究の成果は，野生自己同型に対する人々の認識を変え，今後の自己同型研究のあり方に大きな影響を及ぼすはずである．

また，自己同型の野生性を証明するために本研究で編み出された高度な技法は，極めて強力で有用である．これらは，自己同型の野生性の研究の現在の国際的水準に比べても，圧倒的に優れている．我々は有効な手法を開発し，それを用いて非常に重要なテーマに絞って研究を行った．しかし，自己同型の野生性に関して解明すべきことはまだたくさんあり，今後も研究は継続していくはずである．その際にも，本研究で開発された手法は重要な役割を果たすと予想される．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 10 件）

(1) Shigeru Kuroda
Initial algebras and the Jung-van der Kulk theorem, in *Affine Algebraic Geometry: The Russell Festschrift*, 193-204, CRM Proceedings & Lecture Notes, 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011. 査読有

(2) Shigeru Kuroda
Wildness of polynomial automorphisms in three variables,
arXiv:math.CA/1110.1466v1,
168 ページ，2011 年，査読無

(3) Ei Kobayashi, Shigeru Kuroda
A Galois counterexample to Hilbert's Fourteenth Problem in dimension three with rational coefficients, TMU Mathematics and Information Sciences Preprint Series, 4 ページ，2011 年，査読無

(4) Shigeru Kuroda
Wildness of polynomial automorphisms: Applications of the Shestakov-Umirbaev theory and its generalization, in *Higher Dimensional Algebraic Geometry*, 103-120, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B24 Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2011, 査読有

(5) Shigeru Kuroda
An algorithm for deciding tameness of polynomial automorphisms in three variables, to appear in the Proceedings of CAAG 2010, International Conference on Commutative Algebra and Algebraic Geometry, December 6-10, 2010, Indian Institute of Science, Bangalore. 査読有，掲載決定

(6) Shigeru Kuroda
Shestakov-Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism, Tohoku Math. J. 62 (2010), 75-115, 査読有

(7) Shigeru Kuroda
Automorphisms of a polynomial ring which admit reductions of type I, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 45 (2009), 907-917, 査読有

(8) Shigeru Kuroda
A simple proof of Nowicki's conjecture on the kernel of an elementary derivation, Tokyo J. Math. 32 (2009), 247-251, 査読有

〔学会発表〕（計 28 件）

(1) Shigeru Kuroda
Adventures of polynomial rings,
Department Colloquium, 2012 年 3 月 23 日, University of New Caledonia（ニューカレドニア）

(2) Shigeru Kuroda
Subfields of Abhyankar valued fields, アフィン代数幾何学研究集会,2012 年 3 月 4 日，関西学院大学梅田キャンパス

(3) Shigeru Kuroda
Tame intersection theory of the automorphism group of a polynomial ring, The 7th Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra, 2011 年 12 月 12, Quy Nhon University（ベトナム）

(4) Shigeru Kuroda
Wildness of polynomial automorphisms in three variables, Mini Workshop "Cox Ring, Motivic Zeta, and related topics" 2011 年 9 月 16 日，広島大学

(5) Shigeru Kuroda
A tame intersection theorem for the automorphism group of the polynomial ring in two variables over a domain, アフィン代数幾何学研究集会，2011 年 9 月 1 日，関西学院大学梅田キャンパス

(6) Shigeru Kuroda
多項式環の自己同型群の順交叉理論，第 1 回多項式環論セミナー，2011 年 8 月 10 日，（財）静岡県文化財団グランシップ

(7) Shigeru Kuroda
A further generalization of the Shestakov-Umirbaev inequality, International Conference on Affine Algebraic Geometry, 2011 年 3 月 6 日，関西学院大学梅田キャンパス

(8) Shigeru Kuroda
Topics in polynomial rings, Part II, Mini-workshop of Algebra, 2011 年 1 月 13 日，National Taiwan University（台湾）

(9) Shigeru Kuroda
Topics in polynomial rings, Part I,

Mini-workshop of Algebra, 2011 年 1 月 12 日, National Taiwan University (台湾)
(10) Shigeru Kuroda
Local slice construction and wild automorphisms, The 6th Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra, 2010 年 12 月 15 日, IPC 生産性国際交流センター
(11) Shigeru Kuroda
Wildness of polynomial automorphisms in three variables, CAAG 2010, International Conference on Commutative Algebra and Algebraic Geometry, 2010 年 12 月 9 日, Indian Institute of Science, Bangalore (インド)
(12) Shigeru Kuroda
Wildness of polynomial automorphisms in three variables, Meeting No. 1064: 2010 Fall Central Section Meeting of AMS, 2010 年 11 月 6 日, Notre Dame, Indiana (アメリカ)
(13) Shigeru Kuroda
Local slice construction and wild automorphisms, アフィン代数幾何学研究集会, 2010 年 9 月 4 日, 関西学院大学梅田キャンパス
(14) Shigeru Kuroda
The infiniteness of the SAGBI bases for certain invariant rings, Algebra Seminar, 2010 年 3 月 16 日, Indian Statistical Institute (インド)
(15) Shigeru Kuroda
Wildness of polynomial automorphisms in three variables, Monday Colloquium, 2010 年 3 月 15 日, Indian Statistical Institute (インド)
(16) Shigeru Kuroda
Wildness of polynomial automorphisms in three variables, アフィン代数幾何学研究集会, 2010 年 3 月 7 日, 関西学院大学梅田キャンパス
(17) Shigeru Kuroda
Construction of automorphisms of the polynomial ring in two variables over an integral domain, 特異点論月曜セミナー, 2010 年 1 月 25 日, 日本大学
(18) Shigeru Kuroda
The wildness of several classes of automorphisms of a polynomial ring, The 5th Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra, 2010 年 1 月 6 日, Institute of Mathematics (ベトナム)
(19) Shigeru Kuroda
The wildness of several automorphisms of a polynomial ring, Higher Dimensional Algebraic Geometry, 2009 年 12 月 15 日, 京都大学数理解析研究所
(20) Shigeru Kuroda
多項式環をめぐるいくつかの話題, 第 8 回「代数学と計算」研究集会, 2009 年 12 月 3 日, 首都大学東京国際交流会館
(21) Shigeru Kuroda
多項式環のいくつかの指数自己同型の野生性, 代数幾何講演会, 2009 年 10 月 13 日, 埼玉大学
(22) Shigeru Kuroda
Shestakov-Umirbaev inequality and automorphisms of a polynomial ring, Algebra Seminar, 2009 年 8 月 27 日, Indian Statistical Institute (インド)
(23) Shigeru Kuroda
A structure theorem for initial algebras and its application, Algebra Seminar, 2009 年 8 月 25 日, Indian Statistical Institute (インド)
(24) Shigeru Kuroda
Some problems on polynomial rings, Monday Colloquium, 2009 年 8 月 17 日, Indian Statistical Institute (インド)
(25) Shigeru Kuroda
Initial algebras and the Jung-van der Kulk theorem, Affine Algebraic Geometry, Conference in honor of Peter Russell, June 1-5, 2009 年 6 月 3 日, McGill University (カナダ)

〔その他〕
(1) 情報系研究者たちの協力で開発された「3 変数多項式環の自己同型の順性判定ソフトウエア」を, 詳しい使用法とともに公開しているホームページの URL:
http://arith.math.se.tmu.ac.jp/tame/

(2) 第 4 回数理情報科学コロキウム（首都大学東京大学院理工学研究科数理情報科学専攻主催）の講師を務め,「多項式環の研究―未解決問題をいかに解くか―」という題目で市民向けの講演を行った. 秋葉原, 2010 年 5 月 29 日 http://www.tmu.ac.jp/news/event/2025.html?d=assets/files/download/news/event_0529.pdf

６．研究組織
(1)研究代表者
黒田　茂（Kuroda Shigeru）
首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：70453032

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし