

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 30 日現在

機関番号：32686

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740030

研究課題名（和文）トーリック環の幾何的および組合せ論的変形操作に関する理論の構築

研究課題名（英文）Construction of theory of geometric and combinatorial deformations of toric rings

研究代表者

大杉 英史（HIDEFUMI OHSUGI）

立教大学・理学部・教授

研究者番号：80350289

研究成果の概要（和文）：トーリック環の幾何的および組合せ論的変形について研究し、多面体の積などの基本的な操作の一般化である入れ子配置について、トーリック環に纏わる多くの性質が遺伝することを証明した。また、整数行列に対して、中心的対称配置を定義し、もとの整数行列が単模行列ならば、そのトーリック環は非常に良い性質（正規、ゴレンシュタインなど）を持つことを示した。その他、切断多面体の正規性が、有限グラフのマイナー、クリーク和に関して閉じていることを証明した。

研究成果の概要（英文）：We study geometric and combinatorial deformations of toric rings and show that a lot of properties of toric rings are inherited by taking a nested configuration that is a generalization of the basic operations, such as the product of polytopes. Moreover, for integer matrices, we define centrally symmetric configurations and prove that their toric rings has good properties (normal and Gorenstein etc.). In addition, it is shown that the normality of cut polytopes is closed under taking a minor and a clique sum.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環論、グレブナー基底

1. 研究開始当初の背景

トーリック環の生成系に対応するベクトル集合の凸閉包の正則三角形分割と、トーリックイデアルのグレブナー基底から導かれるイニシャルイデアルの根基イデアルの間には美しい対応が知られている。すなわち、根基イデアルは、凸閉包の正則三角形分割の Stanley-Reisner イデアルと一対一の関係にあり、なおかつ、応用上重要な「三角形分

割の単模性」は、三角形分割に対応するイニシャルイデアルがスクエアフリーな単項式で生成されることと同値である。

研究代表者は Herzog 氏、日比孝之氏との共同研究において、トーリック環の正規性や、トーリックイデアルのグレブナー基底に関連して、combinatorial pure subring という概念を定義した。これは、実際には、配置の凸閉包の面に注目した概念である。また、

研究代表者が日比氏との共同研究で証明した、トーリックイデアルの任意の逆辞書式順序に付随するイニシャルイデアルがスクエアフリーになるための十分条件は、Sullivant によって必要十分条件であることが示され、幾何的な条件によって特徴付けられた。さらには、研究代表者らが提唱した、入れ子配置などの諸概念は、多面体の言葉に直せば、多面体の積や、多面体の積の一般化に該当する。このように、トーリック環およびトーリックイデアルの性質と、対応する凸閉包の性質には強い関連性があるが、凸閉包の変形がもたらすトーリックイデアルへの影響については、凸閉包の積などに関する結果が散見されるのみであり、ほとんどの場合、未解明であった。

2. 研究の目的

当該研究では、トーリック環の生成系をなす単項式集合または対応する配置の凸閉包に対して、様々な変形を行った際の、トーリック環、トーリックイデアルの性質の変化について研究を行った。具体的には、特に以下の(1)～(3)の性質の変化に着目した。

(1) トーリックイデアルの極小生成系、または、グレブナー基底の次数

トーリックイデアルが2次の2項式で生成されることや、2次の2項式からなるグレブナー基底をもつことは、それぞれ、トーリック環の Koszul 性に対する必要条件、十分条件として重要な意味をもつ。当該研究ではこのような条件が保たれるような変形について研究する。また、一般の次数についても、各種変形による次数の変化を解析する。

(2) トーリック環の正規性とスクエアフリーなイニシャルイデアルの存在

正規性はトーリック環の環論的性質の中で、もっとも重要なものである。また、正規であるための効果的な十分条件として、トーリックイデアルがスクエアフリーなイニシャルイデアルをもつことが挙げられる。当該研究ではこの2つの条件が、変形によってどのような影響を受けるかについて分析する。また、正規ではない場合に、その正規化や、いわゆる hole の個数が有限かどうかについても調べる。

(3) 正規化体積

凸閉包の正規化体積は、トーリック環の環論的不変量や、偏微分方程式の解空間の次元に対応することが知られており、重要である。グレブナー基底と凸閉包の三角形分割の対

応を活用し、単項式や多面体を変形することによる体積の変化について研究する。

3. 研究の方法

トーリック環の生成系をなす単項式集合または対応する配置の凸閉包に対して、様々な変形を行った際の性質の変化について研究する。

多面体の変形としては、積などの基本的な変形の一般化から始めて、より複雑な変形の考察を目指す。また、トーリック環、トーリックイデアルの性質としては、トーリックイデアルの極小生成系、または、グレブナー基底の次数や、トーリック環の正規性とスクエアフリーなイニシャルイデアルの存在を中心に、有用な一般論の構築を目指す。

4. 研究成果

主に、以下の(1)～(3)について結果を得た。

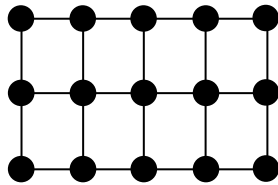
(1) 入れ子配置

多面体の積などの基本的な操作の一般化である「入れ子配置」を考え、トーリック環の正規性や very ample 性、および、トーリックイデアルの生成系、グレブナー基底の構造について解析を行い、多くの性質が対応するトーリック環、トーリックイデアルに遺伝することを証明した。特に、もとの配置のグレブナー基底を用いた、入れ子配置のグレブナー基底の効果的な構成法を発明した。これは、次数2の場合に限定した青木一日比一大杉一竹村の結果を、一般の次数に拡張したものであり、さらには、もとのイニシャルイデアルたちがスクエアフリーならば、構成されるイニシャルイデアルもスクエアフリーであるという意味で、画期的な改善に成功している。なお、この結果は生成系についても同様である。また、応用例として、 3×3 輸送多面体の研究に関連し、3次のバーコフ多面体の膨らましに付随する配置を入れ子配置として解釈し、上記の結果を得た際の議論と同様の議論を行うことによって、2倍以上に膨らませると対応するトーリックイデアルに対して、2次のグレブナー基底が存在することを証明した。

(2) 有限グラフの切断多面体

有限グラフの切断多面体とは、グラフの各切断に $(0, 1)$ ベクトルを付随させ、その凸閉包をとって得られる $(0, 1)$ 凸多面体をいう。切断多面体は、グラフ理論や、組合せ最適化などに現れる重要な多面体のクラスである。当該研究では、有限グラフに付随する切断多面体のトーリック環の正規性に

ついて考察した。正規性に関しては、Sturmfels-Sullivant によって「有限グラフに付随する切断多面体が正規であることと、5 次の完全グラフをマイナーとして持たないことは同値である」ことが予想されている。切断多面体が正規ならば、5 次の完全グラフをマイナーとして持たないことは容易に分かるが、逆については、限られた結果しか得られていなかった。本研究によって、正規切断多面体全体の集合が、有限グラフのマイナーを取る操作、および、クリーク和を取る操作に関して閉じていることを証明した。(なお、辺の縮約に関して閉じていることは、多面体の面を考えることになることから、既に知られていた。) この結果は、上記の予想の解決に向けて大きな寄与が期待できる。例えば、マイナー理論を活用すれば、予想を解決するためには、格子グラフについて証明できれば十分であることが従う。



格子グラフの例

(3) 中心的対称配置

変形操作として、整数行列の中心的対称配置について研究した。特に、有向サイクルの隣接行列に対して中心的対称配置を考え、付随するトーリックイデアルの、ある逆辞書式順序に関するグレブナー基底を理論的に構成した。対応するイニシャルイデアルはスクエアフリーであり、このイニシャルイデアルを用いて、対応するゴレンシュタイン・ファノ凸多面体のエルハート多項式を計算することができる。これらのエルハート多項式の根を詳細に調べたところ、頂点数が十分大きい場合は、Beck らによる予想「次元 D の凸多面体のエルハート多項式の根の実部は $-D$ 以上 $D-1$ 以下である」の反例となることが判明し、貴重な凸多面体である、非特異ファノ凸多面体で上記予想の反例が得られた。(ただし、反例は、東谷章弘氏によっても得られている。) 具体的な値は表 1 の通りである。

次元	根の実部の最大値
34	16.35734046...
124	123.5298262...
126	126.5725840...

表 1

またこの例は同時に、予想「次元 D のゴレンシュタイン・ファノ凸多面体のエルハート多項式の根の実部は $-D/2$ 以上 $D/2 - 1$ 以下である」の反例となっている。そのほか、エルハート多項式の根が興味深い性質をもつようなゴレンシュタイン・ファノ凸多面体の構成や、完全グラフの辺凸多面体などのエルハート多項式の根の実部について結果を得た。

このように、(1) ~ (3) では、複数の配置構成法を模索したが、その中で「整数行列の中心的対称配置」は、正規ゴレンシュタイントーリック環を豊富に生み出し、エルハート多項式に関する予想の反例の構成など、既に顕著な成果を挙げており、将来性の高い研究対象である。しかし、トーリックイデアルの構造などについては、未解明な部分が多く、今後、このような対称性を持つ配置構成法を重点的に研究する必要がある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① H. Ohsugi and T. Hibi, Toric ideals of finite graphs and adjacent 2-minors, *Mathematica Scandinavica*, 査読有, 掲載決定.
- ② H. Ohsugi and T. Hibi, Centrally symmetric configurations of integer matrices, *Nagoya Mathematical Journal*, 査読有, 掲載決定.
- ③ H. Ohsugi and K. Shibata, Smooth Fano polytopes whose Ehrhart polynomial has a root with large real part, *Discrete and Computational Geometry*, 査読有, vol. 47, 2012, 624-628. (DOI: 10.1007/s00454-012-9395-7)
- ④ T. Matsui, A. Higashitani, Y. Nagazawa, H. Ohsugi and T. Hibi, Roots of Ehrhart polynomials arising from graphs, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 査読有, vol. 34, 2011, 721-749. (DOI: 10.1007/s10801-011-0290-8)
- ⑤ T. Hibi, A. Higashitani and H. Ohsugi, Roots of Ehrhart polynomials of Gorenstein Fano polytopes, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 査読有, vo. 139, 2011, 3727-3734. (DOI:10.1090/S0002-9939-2011-11013-X)
- ⑥ H. Ohsugi and T. Hibi, Toric rings and ideals of nested configurations, *Journal of Commutative Algebra*, 査読有, vol. 2, 2010, 187-208. (DOI:10.1216

- /JCA-2010-2-2-1)
- ⑦ H. Ohsugi and T. Hibi, Non-very ample configurations arising from contingency tables, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 査読有, vol. 62, 2010, 639-644. (DOI:10.1007/s10463-010-0288-3)
 - ⑧ H. Ohsugi, Normality of cut polytopes of graphs is a minor closed property, Discrete Mathematics, 査読有, vol. 310, 2010, 1160-1166. (DOI:10.1016/j.disc.2009.11.012)

〔学会発表〕(計 1 1 件)

- ① 大杉英史, 日比孝之, Toric ideals of finite graphs and adjacent 2-minors, 日本数学会 2012 年度年会, 2012 年 3 月 27 日, 東京理科大学.
- ② 柴田和樹, 大杉英史, Smooth Fano polytopes whose Ehrhart polynomial has a root with large real part, 日本数学会 2012 年度年会, 2012 年 3 月 27 日, 東京理科大学.
- ③ H. Ohsugi, Gröbner bases of toric ideals of nested configurations arising in algebraic statistics, BiW02011 (Introduction of Symbolic Computation: Toward its Application to Biological Sciences), 2012 年 1 月 27 日, 産総研臨海副都心センター.
- ④ 大杉英史, 日比孝之, Centrally symmetric configurations of integer matrices, 日本数学会秋季総合分科会, 2011 年 9 月 28 日, 信州大学.
- ⑤ H. Ohsugi and T. Hibi, Toric rings and ideals of nested configurations arising in algebraic statistics, The 17th International Conference on Applications of Computer Algebra, 2011 年 6 月 28 日, Houston, Texas (アメリカ).
- ⑥ 大杉英史, トーリックイデアルの 20 年, 第 55 回代数学シンポジウム, 2010 年 8 月 9 日, 北海道大学.
- ⑦ 大杉英史, 日比孝之, 分割表に付随するトーリック環の very ample 性, 日本数学会 2010 年度年会, 2010 年 3 月 24 日, 慶應義塾大学.
- ⑧ 大杉英史, 日比孝之, Normality of toric rings arising from nested configurations, 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会, 2009 年 9 月 27 日, 大阪大学.
- ⑨ 大杉英史, 日比孝之, Gröbner bases of nested configurations II, 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会, 2009 年 9 月 27 日, 大阪大学.

- ⑩ H. Ohsugi, Edge polytopes and some examples, Combinatorial challenges in toric varieties, 2009 年 4 月 29 日, American Institute of Mathematics (アメリカ).
- ⑪ H. Ohsugi, Toric ideals of nested configurations, Special session on Algebra & Number Theory with Polyhedra, Western Section AMS Meeting, 2009 年 4 月 26 日, サンフランシスコ州立大学 (アメリカ).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大杉 英史 (HIDEFUMI OHSUGI)
立教大学・理学部・教授
研究者番号：80350289

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし