

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月27日現在

機関番号：13801

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2012

課題番号：21740037

研究課題名（和文） 群作用のある非正曲率空間およびコクセター群の研究

研究課題名（英文） Research on spaces of non-positive curvature with group actions and Coxeter groups

研究代表者

保坂 哲也 (HOSAKA TETSUYA)

静岡大学・理学部・准教授

研究者番号：50344908

研究成果の概要（和文）：本研究では、CAT(0)群と CAT(0)空間とその境界、および Coxeter 群の研究を行い、いくつか研究成果を得た。まず、CAT(0)群の "splitting theorem" を証明し、積の CAT(0)群の境界の位相的 rigidity について研究成果を得た。また、CAT(0)群が2つの CAT(0)空間に幾何学的に作用するとき、2つの境界の間の群作用不変の同相写像について研究成果を得ている。また、Coxeter 群の代数的 rigidity についてと、Coxeter 群を用いたグラフ理論への応用に関する研究成果も得ている。

研究成果の概要（英文）：I have obtained some results on CAT(0) groups, CAT(0) spaces, their boundaries and Coxeter groups. First, I proved a "splitting theorem" for CAT(0) spaces, and obtained that products of rigid CAT(0) groups are also rigid CAT(0). Next, I had some results on equivariant-homeomorphisms of boundaries of CAT(0) groups. Also I obtained results on algebraic rigidity of Coxeter groups and on graph theory by investigating corresponding Coxeter groups.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学，幾何学

キーワード：幾何学的群論・位相幾何学

1. 研究開始当初の背景

本研究では、幾何学的な群作用のある CAT(0)空間（非正曲率空間）および Coxeter 群の研究を主な目的としている。

測地線空間上の三角形をユークリッド平面（曲率0の平坦な空間）の三角形と比較して、より内側に曲がっていることをみることにより、非正の曲率をもつ空間の定式化を行うことができる。このような空間を CAT(0)

空間とよぶ。例えば、ユークリッド空間や、双曲空間、また、非正の断面曲率をもつ基本群の消えているリーマン多様体などは、その例であるが、CAT(0)空間は、測地線の三角形の比較のみで定義されているため、そのクラスは幅広く豊かで、非常に複雑なワイルドな空間も含む。有界な閉集合がコンパクトとなる空間を proper とよぶが、非有界な proper CAT(0)空間は、「境界」とよばれるコンパク

ト距離空間を付け加えることによりコンパクト化される。CAT(0)空間およびその境界は、非常に興味深い研究対象であり、本研究の主な対象である。

負曲率の定式化としては、Gromov hyperbolic 空間が有名であり、その場合も「境界」が定義されるが、Gromov hyperbolic でありかつ CAT(0)である空間のそれぞれから定義される境界は、一致する。本研究では、特に、等長的で離散な群作用のある CAT(0)空間とその境界を主な研究対象としている。

Gromov hyperbolic 空間においては、幾何学的に(cocompact, isometry, proper に)作用する群によってその境界の位相が決定される。一方で、群が 2 つの CAT(0)空間に幾何学的に作用するとき、この 2 つの CAT(0)空間の境界は同相となるのか、という重要な幾何学的 rigidity の問題がある。この問題には反例が存在することが C.B.Croke, B.Kleiner によって近年示され、その後、更に、あるひとつの群が幾何学的に作用する複数の CAT(0)空間の境界として、非可算無限の種類位相が現れ得ることが示されている。どのような群が幾何学的に作用する CAT(0)空間の境界の位相を決定するのか、また、特定の群に対して、幾何学的に作用する CAT(0)空間の境界としてどのような空間が実現され得るのか、は大変興味深い問題である。

CAT(0)空間に幾何学的に作用する群を CAT(0)群とよぶ。例えば、非正曲率を持つコンパクトリーマン多様体の基本群は、CAT(0)群の例である（その universal covering が CAT(0)空間となり、基本群は幾何学的にこの CAT(0)空間に作用するため）。

また、本研究では、Coxeter 群に関する研究も同時に行っている。Coxeter 群の歴史は古く、H.S.M.Coxeter によって 1935 年に有限鏡映群を特徴付ける表示を持つ群として出現した。有限 Coxeter 群については、完全に分類がなされるなど、ある程度のことわかっているのだが、無限 Coxeter 群については、直接的な研究が困難であったために、近年まであまり研究が進展していなかった。近年、M.W.Davis によって、無限 Coxeter 群から定義される Davis 複体とよばれる CAT(0)空間やその境界を幾何的な手法を用いて研究する論文が発表されて以来、無限 Coxeter 群は注目を集めるようになった。これは、捕らえ難い離散な群に対して幾何的なものを対応させ、視覚的なイメージによって研究の見通しをよくするというものでもある。有限 Coxeter 群がある一つの結晶を表現していると考えられるのに対して、無限 Coxeter 群から定義される Davis 複体 (CAT(0)空間)は、無限個の結晶をある規則により結合させたものを表現していると捕ら

えることができる。Coxeter 群は、Davis 複体とよばれる CAT(0)空間に幾何学的に作用するため、CAT(0)群である。

群が幾何学的に作用する CAT(0)空間の境界は、一般に非常に複雑で難解であるが、一方で、群の作用によって、なんらかの規則性が見出せる場合がある。このような境界は、フラクタルのような構造を持っているように見え、これまでこの研究に、極小性や攪拌集合といった力学系の概念を取り入れることにより研究成果を得ていた。

また、CAT(0)空間および CAT(0)群の asymptotic 次元にも取り組んでいる。Asymptotic 次元は Gromov によって導入されたものであるが、近年、G.Yu によって、群の asymptotic 次元の有限性が、Novikov 予想および Gromov-Lawson 予想と直接関係することが証明されている。ここで、特に「CAT(0)群の asymptotic 次元は常に有限か?」という問いは、近年、非常に重要な未解決問題として知られている。

2. 研究の目的

(1) Coxeter 群の境界について、極小性や攪拌集合といった力学系の概念を取り入れた研究を手掛かりに、積に分解しない Coxeter 群の境界のフラクタルのような位相の構造を明らかにする。

(2) CAT(0)群の asymptotic 次元に関して、まずは、ごく簡単な場合でもよいので、CAT(0)群の asymptotic 次元の計算に取り組む。また、CAT(0)空間の asymptotic 次元について、Bestvina-Mess の定理のような境界の次元との関連性がないか、研究を進める。

(3) CAT(0)群が 2 つの CAT(0)空間に幾何学的に作用するとき、2 つの境界の間の関係を探る。

(4) CAT(0)群および Coxeter 群の境界として、どのような位相空間が実現できるのか研究を進める。特に、ある低次元の Coxeter 群の境界として、Menger curve や Sierpinski carpet がどのように実現できるのか調べたい。

(5) CAT(0)群が幾何学的に作用する CAT(0)空間における splitting theorem の研究を進める。ここでいう "splitting theorem" とは、「群が積に分解するとき、群の積の分解に応じて作用する空間も積に分解する」定理のことをいう。歴史的には、D.Gromoll-J.Wolf(1971), H.B.Lawson-S.T.Yau(1972), V.Schroeder(1985), M.R.Bridson-A.Haefliger(1999) による有名な splitting theorem が知られており、本研究では、その CAT(0)群・CAT(0)空間への拡張を目標とする。

(6) Coxeter 群がいつ Coxeter 系を決定するのか、という Coxeter 群の代数的な rigidity の問題に対して、研究を進める。

3. 研究の方法

知念直紹氏 (H21 年度~H23 年度は広島工業大学に所属、H24 年度~は防衛大学校に所属) と共同研究を行い、平成 21 年度に、まず CAT(0) 空間および CAT(0) 群の asymptotic 次元、Higson corona の次元、および、境界の次元の間の関係について、研究を進展させている。また、平成 22 年度~24 年度には、共同研究により、CAT(0) 群および CAT(0) 空間の境界、特に、Coxeter 群および Davis 複体の境界について、研究を進展させ、その中でも特に、低次元の hyperbolic right-angled Coxeter 群の境界に関する研究を共同で行い、研究成果を得た。具体的には、hyperbolic right-angled Coxeter 群の境界が 1 次元の Menger curve および Sierpinski carpet になるための Coxeter 群の nerve の連結性に関する特徴付けを与えた。Right-angled Coxeter 群の境界がいつ Menger space となるか等、境界の位相に関する未解決問題は多く、今回、1 次元の場合について成果を得た。

またその他にも、研究集会で成果発表を行い、近い分野の研究者と情報交換や議論を行い、研究を推進した。

4. 研究成果

(1) CAT(0) 群が幾何学的に作用する CAT(0) 空間の splitting theorem を示した。「群が積に分解するとき、群の積の分解に応じて作用する空間も積に分解する」という定理 “splitting theorem” は歴史的に有名なものがいくつか知られているが、本定理は、その CAT(0) 群・CAT(0) 空間への拡張にあたる。CAT(0) 群が、幾何学的に作用する CAT(0) 空間の境界の位相を決定するとき “rigid” という。C. Croke-B. Kleiner (2000) によって、non-rigid な CAT(0) 群が構成されている。本研究成果の splitting theorem の応用として、「2つの rigid CAT(0) 群の積は rigid となる」ことを得ている。

(2) 一般に複雑な構造をもつ CAT(0) 群の境界の研究に対して、その複雑さを捕えるために力学系の概念を導入し、そして更に、Ballmann の “rank-one isometry” に関する研究成果を用いた。またさらに、Caprace-Fujiwara の Coxeter 群の Davis 複体の rank-one isometry に関する結果を用いることにより、Coxeter 群が作用する CAT(0) 空間の境界が位相的にフラクタルの構造をもつ必要十分条件を得た。

(3) ある CAT(0) 群が 2 つの CAT(0) 空間に幾何学的に作用しているとき、その 2 つの CAT(0) 空間の境界は、一般には同相にはなら

ず (C. Croke-B. Kleiner (2000))、また、群作用から得られる自然な quasi-isometry が連続的に 2 つの境界の間の写像を一般には導かないことも Bowers-Ruane (1996) の例により知られている。本研究では、Bowers-Ruane の例を考察し、群作用から得られる自然な quasi-isometry が連続的に 2 つの境界の間の同相写像を導くためのある十分条件を得た。また、得られた十分条件の応用として、Gromov hyperbolic ではない、境界が決定される CAT(0) 群の例を構成している。その後さらに、群作用から得られる自然な quasi-isometry が連続的に 2 つの境界の間の同相写像を導くための必要十分条件を得た。また、得られた必要十分条件の応用として、Bowers-Ruane の例とは異なる quasi-isometry が連続的に 2 つの境界の間の写像を導かない簡単なしかし本質的な例を構成している。

(4) right-angled Coxeter 群と flag complex および有限グラフの間の対応関係に関する研究を通して、グラフ理論の「再構成問題」に取り組み、研究成果を得た。これは、ホモロジー多様体の三角形分割となっている flag complex の 1-skeleton として得られるグラフは再構成可能なグラフとなるというものである。「再構成問題」はグラフ理論において有名な未解決問題である。また、ある幾何学的な性質を持つ flag complex から得られるグラフが再構成可能グラフであることも示した。

(5) 知念直紹氏 (H21 年度~H23 年度 広島工業大、H24 年度~ 防衛大) と共同研究を行い、CAT(0) 空間および CAT(0) 群の asymptotic 次元、Higson corona の次元、および、境界の次元の間の関係について、研究成果を得た。特に、Bestvina-Mess の定理のような asymptotic 次元と境界の被覆次元との関係性の片方の不等号を示すことができた。

(6) CAT(0) 群および Coxeter 群の境界の研究について、その中でも特に、低次元の hyperbolic right-angled Coxeter 群の境界に関する研究を知念直紹氏と共同で行い、研究成果を得た。具体的には、hyperbolic right-angled Coxeter 群の境界が 1 次元の Menger curve および Sierpinski carpet になるための Coxeter 群の nerve の連結性に関する特徴付けを与えた。Right-angled Coxeter 群の境界がいつ Menger space となるか等、境界の位相に関する未解決問題は多く、今回、1 次元の場合について成果を得た。

(7) Coxeter 群がいつ Coxeter 系を決定するのか、という Coxeter 群の代数的な rigidity の問題に関して、これまでに得られた研究成果から、さらに進展を得ている。Coxeter 群 W が、その Coxeter 系 (W, S) を同型の差を除いて決定するとき、Coxeter 群 W を代数的に

“rigid”であるという。Coxeter 群の分類や Coxeter 群の rigidity の判定は大きな未解決問題である。本研究では、新しい rigid な Coxeter 群のクラスを与えた。特にこれは、D. Radcliffe(2001)による結果の拡張となっている。

(8) CAT(0) 空間 X のコンパクト離散鏡映群 W を考えると、 W は Coxeter 群となる。Coxeter 群 W の Davis-Moussong 複体とこの CAT(0) 空間 X の間の類似性を得た。さらに、Coxeter 群 W の parabolic 部分群の境界上の極限集合についていくつか研究成果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

- ① Tetsuya Hosaka, On a new class of rigid Coxeter group, Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, 印刷中
- ② Tetsuya Hosaka, Reconstructible graphs, simplicial flag complexes of homology manifolds and associated right-angled Coxeter groups, Osaka Journal of Mathematics, 査読有, 印刷中
- ③ Naotsugu Chinen and Tetsuya Hosaka, Asymptotic dimension and boundary dimension of proper CAT(0) spaces, Tsukuba Journal of Mathematics, 査読有, 36, 2012, 185-191
- ④ Tetsuya Hosaka, On splitting theorems for CAT(0) spaces and compact geodesic spaces of non-positive curvature, Mathematische Zeitschrift, 査読有, 272, 2012, 1037-1050
DOI:10.1007/s00209-011-0972-x
- ⑤ Tetsuya Hosaka, Parabolic subgroups of Coxeter groups acting by reflections on CAT(0) spaces, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 査読有, Vol 42, 2012, 1207-1214
DOI:10.1216/RMJ-2012-42-4-1207
- ⑥ Tetsuya Hosaka, On non-sensitive homeomorphisms of the boundary of a proper cocompact CAT(0) space, Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 査読有, 18, 2011, 491-504
- ⑦ Tetsuya Hosaka, On boundaries of Coxeter groups and topological fractal structures, Tsukuba Journal of Mathematics, 査読有, 35, 2011, 153-160
- ⑧ Tetsuya Hosaka, CAT(0) groups and Coxeter groups whose boundaries are scrambled sets, Journal of Pure and Applied Algebra, 査読有, 214, 2010, 919-936

- ⑨ Naotsugu Chinen and Tetsuya Hosaka, Asymptotic dimension of proper CAT(0) spaces that are homeomorphic to the plane, Canadian Mathematical Bulletin, 査読有, 53, 2010, 629-638

[学会発表] (計 7 件)

- ① 保坂哲也, On structure of CAT(0) groups, 数理解析研究所研究集会「一般位相幾何学および幾何学的トポロジーの現状と諸問題」, 京都大学数理解析研究所, 2012年9月27日
- ② 保坂哲也, Topological fractal structures of boundaries of Coxeter groups and CAT(0) groups, 数理解析研究所研究集会「力学系とその周辺分野の研究」, 京都大学数理解析研究所, 2012年7月11日
- ③ 保坂哲也, On local connectivity of boundaries of CAT(0) spaces, 数理解析研究所研究集会「一般及び幾何学的トポロジーとその応用」, 京都大学数理解析研究所, 2011年10月18日
- ④ Tetsuya Hosaka, On equivariant homeomorphisms of boundaries of CAT(0) groups, Rigidity School, Nara 2010/2011, 奈良商工会議所, 2011年3月5日
- ⑤ 保坂哲也, On equivariant homeomorphisms of boundaries of CAT(0) groups, 数理解析研究所研究集会「一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーの最近の話題とその応用」, 京都大学数理解析研究所, 2010年10月13日
- ⑥ 保坂哲也, Coxeter 群の rank-one isometry とその境界について, 第 45 回位相空間論シンポジウム, 大阪府立大学理学部サイエンスホール, 2010年6月5日
- ⑦ 保坂哲也, On rank-one isometries of right-angled Coxeter groups and their boundaries, 数理解析研究所研究集会「一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーに関する研究」(京都大学楽友会館) 2009年10月15日

[その他]

ホームページ等
<http://www.sci.shizuoka.ac.jp/~math/staffs/hosaka.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

保坂 哲也 (HOSAKA TETSUYA)
静岡大学・理学部・准教授
研究者番号: 50344908

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし