

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21740041

研究課題名（和文） 接触構造、復素曲線を用いた結び目理論の研究

研究課題名（英文） Research on knot theory using contact structures and holomorphic curves

研究代表者

KALMAN Tamás (KALMAN TAMAS)

東京工業大学・グローバルエッジ研究院・テニウ・トラック助教

研究者番号：00534041

研究成果の概要（和文）：

本研究課題では、私は共著者らとともに Heegaard Floer ホモロジーと Homfly 多項式の間、驚くべき新たな関連について記述した理論を発展させていった。特殊な交代絡み目に関する研究分野において、本研究成果は、全ての有向絡み目の一般化に向けての部分的な結果とともによく理解され、評価されている。また、本研究では、私が発見し、さらにそのものが非常に興味深い対象でもある代数的組み合わせ論の理論（ハイパーツリー、ポリマトロイド、そして内的な多項式）を使っている。本研究課題の成果のうち、Juhász と Rasmussen との研究では、このような概念を Heegaard Floer ホモロジーに関連付けた。さらに、Murakami との研究では、この連結を量子不変量との関連で論じていった。こうした研究成果のすべてを、国内外の学会で発表し、一つの研究を除いて、他の研究成果は査読付きの国際的な学術雑誌に投稿し、出版した（出版が予定されている）。

研究成果の概要（英文）：

In this research, I developed a theory that describes a surprising new relation between Heegaard Floer homology and the Homfly polynomial. The connection is well understood in the case of special alternating links, with partial results toward a generalization to all oriented links. It uses a theory in algebraic combinatorics (on hypertrees, polymatroids, and their interior polynomials) that I developed and which is very interesting in its own right. In joint work with Juhász and Rasmussen, we related these notions to Heegaard Floer homology, and in joint work with Murakami, we described their connection to quantum invariants. All these works were presented at conferences both inside and outside of Japan, and with the exception of the joint work with Murakami, they were published in refereed journals.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
年度			0
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分トポロジー

1. 研究開始当初の背景

1980年代に定義された有向絡み目の Jones and Homfly 多項式や 2000年初めに発表された Khovanov と Khovanov-Rozansky ホモロジーと呼ばれるカテゴリフィケーションは強い不変量である。しかし、その真の性質はまだまだ謎めいている。これまでのところ、それらが何を測り、どのように他の量と関わるのかについては知られていない。

特に、似たような謎であるけれども、より自然な構成である Heegaard Floer ホモロジーと関連が存在していることが予想されている。これまでの研究で、いくつかの連結は見つかっていたものの、本研究を開始した時には、このようなエキサイティングな方向性を持った研究全体がまだ極めて初期の段階であったといえる。

2. 研究の目的

本研究では、結び目理論における最近の二つの発見、Ozsvath-Szabo-Rasmussen による Floer ホモロジー、および、Khovanov-Rozansky の Homfly ホモロジーを、できるだけ組み合わせ理論的な、単一のフレームワークに統合することを目的としている。

3. 研究の方法

理論的な数学の分野では、コンピューターによる計算形式での実験というものがときどき行われる。本研究での例の多くは、このようにして生み出された。

本研究がとった方法のほとんどは、以下の2つに集約される：a) 同分野の他の研究者が現在行っている研究を把握し、どのような研究課題が興味深いものであるかを理解していくこと、そして、b) 直観と問題解決能力をもってして、そうした課題に対する答えを見つけ出していくこと、である。さらに、研究を遂行していくにあたって不可欠な方法は、学会に参加して、研究者仲間と密に連絡を取ることである。

本研究で取りあげた課題のどれをとっても、研究の動向や先行研究を知った上で、追求するに値する課題を直観と熟考の上で見つけ出し、時間をかけて証明を見つけ出していった。証明の有効性については、学会発表やメールでのやりとりを通じて、他の研究者とも討議や検討を重ね、さらに確固たるものとしていった。

4. 研究成果

(1) ハイパーグラフの polymatroids と Tutte 多項式について、数学の分野にしては、かな

り長文の論文にまとめた。ハイパーグラフの不変性は二つのホモロジーを統合するための基礎になると考えられるが、実はその鍵となる考え方については、いまだ完全な証明がなされていない状態である。これは辺と頂点を入れ替えた場合に相対原理に関するもので、この証明を見出すことはホモロジーの理解や当該分野の発展にとっては極めて重要なことと思われる。私は、証明を見出すべくさまざまな試行錯誤を重ねた。そして、ついに MIT の Alex Postnikov 教授との共同研究を通じて、交替結び目の Homfly 多項式と結び目の Seifert グラフの Tutte 多項式とが対応するだろうということについて、論文にまとめあげた。

(2) Alex Bene との共同研究では、別の種類の Tutte 多項式についての解明を進めた。この研究で我々が考えたことは、抽象的なハイパーグラフではなく、種数の大きい面で実現されるハイパーグラフについてであった。この多項式には、種数を表す余分な変数を導入することが必要であった。(1)の研究の場合と同じように、似た性質を示すことができると考えるにいたり、その成果を発表した。この成果は、交代しない結び目の場合にも拡張することができる点で注目に値する。

(3) 低次元トポロジーの中でも

Khovanov-Rozansky homology (KhR) と呼ばれる強い結び目不変量の自然記述を探していくことも行った。この理論と Ozsvath and Szabo's Heegaard Floer homology (HF) を含む枠組みについて成果を上げて、代数学 combinatorics に関する重要な解明を行った。

(4) Lattice point arrangements とハイパーグラフの多項式不変量の新たな理論を通じて、KhR と HF の連結を見つけ出したことも成果の一つである。これについては、長編論文を執筆し、国際学会でも何度か発表を行い、評価を得た。まだ残されている重要な問題については、MIT の Alexander Postnikov 教授との共同研究を行って解明を試みた。

(5) Combinatorial 理論とフロアホモロジーとの関連に関しては、ケンブリッジ大学の Andras Juhasz 氏と Jacob Rasmussen 氏との共著論文で論じた。

(6) KhR との関連については東工大の村上齊氏との共同研究でも解明しようとしたのに加えて、多項式に投影される lattice 多面体を見つけるとい進歩もあった。これが Ozsvath-Szabo タイプの連鎖複合へのヒント

となり、恣意的連結にとってKhRを計算することになるであろうことを導きだした。この点については、村上氏とコロンビア大学のDylan Thurston氏とも今後も研究を続けていく予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- (1) Kalman, Tamas. *A version of Tutte's polynomial for hypergraphs*, *Advances in Mathematics*, 査読有, to appear in 2013.
- (2) Kalman, Tamas, Andras Juhasz, and Jacob Rasmussen. *Sutured Floer homology and hypergraphs*, *Mathematical Research Letters*, 査読有, Vol.19, No.6, 2012, 1-20.
- (3) Kalman, Tamas. *Inner products on the Hecke algebra of the braid group*, *Topology and its Applications*, 査読有, Vol.158, No. 5, 2011, 643-646. DOI 10.1016/j.topol.2010.12.014
- (4) Kalman, Tamas. *Meridian twisting of closed braids and the Homfly polynomial*, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 査読有, Vol.146, No.3, 2009, 649-660. DOI 10.1017/S0305004108002016

[学会発表] (計16件)

- (1) Kalman, Tamas. *Relating Jones-type and Ozsvath-Szabo-type knot invariants*, *Seminaire de Topologie*, Institut Mathematiques de Jussieu, (フランス), 2013年3月21日
- (2) Kalman, Tamas. *Relating Jones-type and Ozsvath-Szabo-type knot invariants*, *Algebraic Geometry and Differential Topology Seminar*, The Renyi Institute of Mathematics (ハンガリー), 2012年8月31日
- (3) Kalman, Tamas. *Relating Jones-type and Ozsvath-Szabo-type knot invariants*, 第7回 Pacific Rim Complex Geometry Conference, 京都大学, 2012年8月6日
- (4) Kalman, Tamas. *A new type of*

combinatorics in knot theory, Circle valued Morse theory and Alexander invariants学会, 東京大学, 2011年11月18日

- (5) Kalman, Tamas. *Tutte's polynomial for hypergraphs and polymatroids*, アメリカ数学会 Fall Southeastern Section Meeting, ウェイクフォレスト大学 (アメリカ合衆国), 2011年9月24日
- (6) Kalman, Tamas. *A new type of combinatorics in knot theory*, アメリカ数学会 Fall Southeastern Section Meeting, ウェイクフォレスト大学 (アメリカ合衆国), 2011年9月24日
- (7) Kalman, Tamas. *Hypergraphs, polymatroids, and their Tutte polynomials*, *Combinatorics Seminar*, マサチューセッツ工科大学 (アメリカ合衆国), 2011年3月11日
- (8) Kalman, Tamas. *Heegaard Floer homology and the Homfly polynomial*, トポロジー・幾何セミナー, 広島大学, 2010年11月31日
- (9) Kalman, Tamas. *Heegaard Floer homology and the Homfly polynomial*, at the workshop Foliations and Groups of Diffeomorphisms, 玉原数理科学研究会, 2010年10月26日
- (10) Kalman, Tamas. *Heegaard Floer homology and the Homfly polynomial*, *Geometry and Topology Seminar*, 南カリフォルニア大学 (アメリカ合衆国), 2010年10月7日
- (11) Kalman, Tamas. *Heegaard Floer homology and the Homfly polynomial*, *Algebraic Geometry and Differential Topology Seminar*, The Renyi Institute of Mathematics (ハンガリー), 2010年8月27日
- (12) Kalman, Tamas. *Legendrian knots and exact Lagrangian cobordisms*, 第5回 Pacific Rim Complex and Symplectic Geometry Conference, 名古屋大学, 2010年7月29日
- (13) Kalman, Tamas. *Extremal coefficients in the Homfly polynomial*, *Murakami Seminar*, 東京工業大学, 2010年5月13日

- (14) Kalman, Tamas. *Hypergraphs, Tutte polynomials, and lattice polytopes*, Ikuta Seminar on Toric Topology, 明治大学, 2010年3月6日
- (15) Kalman, Tamas. *Extremal coefficients in the Homfly polynomial*, 第56回 Topology Symposium、北海道大学, 2009年8月9日
- (16) Kalman, Tamas. *Rulings and Lagrangian caps of Legendrian knots*, the symposium Topology and Singularity of Mappings, 信州大学, 2009年6月5日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

K A L M A N T a m a s (KALMAN TAMAS)

東京工業大学・グローバルエッジ研究院・
テニユア・トラック助教
研究者番号：00534041

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし