様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　25 年　5 月 10 日現在

機関番号：11301
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2009　～　2011
課題番号：21740043
研究課題名（和文）　ツイスター空間の明示的構成に関する研究

研究課題名（英文）　Explicit construction of twistor spaces

研究代表者
本多　宣博（HONDA NOBUHIRO）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：60311809

研究成果の概要（和文）：新たな代数的ツイスター空間の数多くの例を具体的に構成し、それらの微分幾何学的な特徴付けを与えた。構成は基本的に多重半反標準系の解析に基づく。また、コンパクトミニツイスター空間の新たな定義を導入し、それを満たすコンパクトミニツイスター空間の具体例を大量に構成した。特に Joyce 計量とよばれる基本的な自己双対計量に対して、ミニツイスター空間を具体的に与えた。これらは比較的単純な構造を持った有理曲面であるが、ほとんどの場合特異点を持つ。さらに、既知であるが重要なツイスター空間に対して、その退化の様子を具体的に記述した。

研究成果の概要（英文）：We have constructed various examples of algebraic twistor spaces in explicit forms, and given a characterization of them in terms of the corresponding self-dual metrics. Also we have refined the definition of minitwistor twistor spaces, and constructed various examples satisfying that property. In particular, we have constructed minitwistor spaces which are obtained from the so called Joyce metrics. There minitwistor spaces are rational surfaces which have simple structure, but usually have singularities. Moreover, we have concretely described some degenerations for significant examples of some algebraic twistor spaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：ツイスター空間、自己双対計量、ミニツイスター空間、Einstein-Weyl 構造、共形構造、線形系、双有理変換

１．研究開始当初の背景

(1) 4次元リーマン多様体上では2次微分形式が自己双対成分と反自己双対成分に分解する．この分解をリーマン計量の曲率テンソル(の一部)に対して適用すると，二つの成分のうちの少なくとも一方が0であるという条件により自己双対計量と呼ばれる概念が定義される．自己双対計量のもっとも著しい性質は，その多様体上のツイスター空間とよばれる3次元複素多様体との間に自然な一対一対応があることである．この対応をPenrose対応という．この対応により自己双対計量という微分幾何学的な対象を複素幾何的な手法で研究することが可能になる．

(2) コンパクトな多様体上の自己双対計量とツイスター空間の非自明な具体例は Poon (J.Diff.Geom.(以下 JDG)1986)により初めて発見された．Poonの例では4次元多様体は2つの複素射影平面の連結和であったが，C. LeBrun (JDG 1991)はPoonの例を任意個数の連結和nCP^2上の自己双対計量とツイスター空間に一般化した．また Poon (JDG 1992)およびKreussler-Kurke (Compo. Math. 1992)は 3 CP^2 上のツイスター空間の大まかな分類を与えた．一方 Joyce (Duke 1995)はnCP^2 上で2次元トーラスの作用をもつ自己双対計量を具体的に構成し，藤木(JDG 2000)は nCP^2 上のそのような自己双対計量は Joyce 計量に限ることを証明した．以上が 2000 年頃までのこの分野における主要な結果である．このようにこの分野での基本的な問題意識は「自己双対計量およびツイスター空間の具体例を見いだすこと」と「それらの特徴付けを与えること」にある．

２．研究の目的

本研究は，研究代表者が近年行ってきた研究の中で得られた新たな問題を解決・発展させることを目的とする．具体的には次の諸テーマを考察する．

(1) 新たなツイスター空間の構成

3 CP ^2 上のツイスター空間は，LeBrunが構成したものと CP ^3 の二重被覆の構造をもつものの二種類に分類される(Poon, Kreussler-Kurke)．前者は後者の極限として得られる．従って 3 CP ^2 上の一般のツイスター空間は CP ^3 の二重被覆の構造を持つ．Kreussler-Kurke はこれら一般のツイスター空間が分岐因子の構造によりさらに3種類に分類できることを示した．筆者は 2007 年に出版された論文の中でこのうちの一種類のツイスター空間のモジュライ空間を決定し，2008年に出版された論文ではそれらのツイスター空間を n CP ^2 (n は任意)上に一般化した．一方，残り二種類のツイスター空間の n CP ^2 への一般化は依然として知られていない． 3 CP ^2 上でのこれらのツイスター空間がモジュライ空間の中で占める大きさを考えると，これは重要な問題であると考えられる．これの解決を目指す．

(2) ミニツイスター空間と3次元Einstein-Weyl多様体の間のHitchin対応の大域化．N. Hitchinは1982年の論文で，3次元Einstein-Weyl多様体とミニツイスター空間とよばれる複素曲面の間には(局所的な)一対一対応があることを示した．これは上記のPenrose対応と同様，微分幾何と複素幾何を結びつける理論的に重要な結果であるが，Hitchinによるミニツイスター空間の定義ではコンパクトなものがたった二つしか存在しないことが容易にわかり，自明でない具体例は得られない．一方筆者はミニツイスター空間がツイスター空間の(1次元群作用による)商空間として得られるというJones-Tod (1984)の結果を逆手にとって，Joyce計量のツイスター空間の商空間として一連のコンパクト複素曲面(有理曲面)を具体的に構成した．これはHitchinの意味ではミニツイスター空間にはなっていないが，Einstein-Weyl多様体に対応していることがほぼ確実なものである．この方向で，Hitchinによる上記対応の強力かつ適切な一般化(大域化)が得られる可能性が高い．この理論が完成すれば今まで例がきわめて限られていたEinstein-Weyl多様体に無数の重要な具体例を提供することができる．なお、これは中田文憲氏との共同研究である．

(3) LeBrunツイスター空間に関する研究

これまで述べてきたように，筆者の近年の研究で，LeBrunのもの以外にも代数的なツイスター空間が大量に存在しそれらが具体的に構成できることが明らかになったが，構造の単純さと構成の容易さという点でLeBrun の例は今後も重要であり続けると思われる．しかし LeBrun ツイスター空間に関してはすべてが解明されているわけではない．例えば，自己同型群に関しては単位元成分は完全にわかっているものの，自己同型群そのものはまだ決定されていない．また，LeBrunツイスター空間のモジュライ空間は完全にわかっているが，その境界に対応する空間をツイスター空間として identify することは未解決である．これはモジュライ空間のコンパクト化の幾何学的な理解という点からは非常に重要である．これら2つの課題(自己同型群とモジュライ空間のコンパクト化)を考察する．なおこれは Jeff Viaclovsky氏 (Winsconsin大)との共同研究である。

３．研究の方法

(1)「新たなツイスター空間の構成」について: 研究目的で述べたように, 3 CP ^2 上の一般のツイスター空間は CP ^3 の二重被覆をもち, それらは分岐因子の構造によってさらに三種類に分類される. このうちの一種類は自己同型群が1次元(単位元成分は C^*)になるという特徴付けを持ち, 残りの二種類は自己同型群が0次元になる. 筆者が2008年の論文で n CP ^2 (n は任意) 上に一般化したツイスター空間は自己同型群が1次元のものである. この一般化を行う際には (1) ツイスター空間内に含まれるべき因子(非特異有理曲面)の構造を決め、 (2) その因子上のある線形系がツイスター空間に延びることを示す、という二段階を踏んだ. 自己同型群が0次元のツイスター空間を n CP ^2 上に一般化しようとするときも同様の方針で考えのが自然であると考えられる.

(2) 「LeBrun ツイスター空間に関する研究」について: この課題に関しては研究目的で述べたように (a) 正則自己同型群の決定 (b) モジュライ空間の境界の幾何学的な理解、という二つのテーマを考察する. (a)についてはツイスター空間の射影モデルの方程式が LeBrun, Poon によって与えられているので, 比較的考えやすい問題と思われる. おそらくまず射影モデルを保つ射影変換を決定し, 次にその中でツイスター空間の自己同型にリフトするものを決定するという(オーソドックスな)方針で求められると思われる. 実際, 筆者らは予備的 (ではあるが大量の)計算によって n=2 のときにはこの方法ですでに自己同型群を決定している. (n は連結和の個数である.) n > 2 のときは別の議論が必要であるが, 計算はむしろ簡単になると思われる. (b)はモジュライ空間のコンパクト化を幾何学的に理解するという意味でより重要な問題である. 筆者はすでに, n=2 のときはコンパクト化のためには境界として二点を付け加える必要があり, それらのうち一点は Fubini-Study 計量をもった CP ^2 のツイスター空間が対応し, もう一点は Eguchi-Hanson 計量のツイスター空間が対応することを確認・証明している. したがって残された問題はこれを n > 2 の場合に一般化することである. n > 2 のときはコンパクト化に必要な境界は点ではなく, 次元を持った集合であり自然な stratification をもつことがわかっている. これらのうちもっとも次元の高い strata ともっとも次元が低い strata に対応する空間をツイスター空間として identify することがもっとも重要であると思われる. (残りの strata はこれら二種類の空間の組み合わせとして理解できると考えられる.)

(3) 「ミニツイスター空間と3次元 Einstein-Weyl 多様体の間の Hitchin 対応の大域化」について: すでに述べたように3次元 Einstein-Weyl 空間とミニツイスター空間と呼ばれる複素曲面の間には Hitchin 対応と呼ばれる(局所的な)一対一対応がある. 後者は normal bundle が2次であるような非特異有理曲線をもつ複素曲面として特徴付けることができる. この非特異有理曲線はミニツイスター直線と呼ばれる. Hitchin 対応では3次元 Einstein-Weyl 空間はミニツイスター直線全体のパラメータ空間として現れる. 一方, Joyce 計量に付随するツイスター空間の商空間として得られるコンパクト複素曲面は, 非特異有理曲線の代わりに, node をいくつかもった有理曲線をもつ. したがって, 我々が構成しようとしている「大域化された Hitchin 対応」とよぶべき対応においては, ミニツイスター直線は node をもった有理曲線であり, 3次元 Einstein-Weyl 空間はそれらのパラメータ空間として現れると考えられる. そして, node をもった曲線のパラメータ空間というのは, 実は代数幾何学で Severi 多様体とよばれている伝統ある研究対象である. この言葉を使えば, 最終的に得るべき定理は「3次元 Einstein-Weyl 空間はすなわち有理曲線たちのなす3次元 Severi 多様体に他ならない」という形になると考えられる.

４．研究成果

(1)「 新たなツイスター空間の構成」 について

まず論文⑦において、任意の n に対して、nCP^2 上の Moishezon ツイスター空間で、対応する自己双対計量が S^1 作用をもつものを具体的に構成した。これらの自己双対構造は、C^2 のある特殊な位置に配置された n 点ブローアップ上の、漸近的に平坦なスカラー平坦ケーラー計量上の (一点) 共形コンパクト化になっているものとして特徴付けられ、(3n-6)次元のモジュライ空間をなす。これらは LeBrun (1991 年)によるツイスター空間および自己双対計量と種々の類似性を持つが、n>3 のとき LeBrun のものの微小変形では得られないものである。また、論文⑧において、任意の n に対して、nCP^2 上の Joyce 計量で、特殊なトーラス作用をもつもののツイスター空間を具体的に構成した。これは論文⑦におけるツイスター空間の構成が基になっている。また、論文⑥に於いては、論文⑦および、2008 年に出版された論文で使った方法を一般化することにより、Joyce 計量のツイスター空間のミニツイスター空間を構成し、ツイスター空間の射影モデルをその上の conic 束として具体的に構成した。さらに、それらのツイスター空間を、ミニツイスター空間および conic 束の構造を保ったまま変形するこ

とにより、Moishezon ツイスター空間で、対応する自己双対計量が S^1 作用をもつものを大量かつ組織的に構成した。これにより、Moishezon ツイスター空間の系列の知られている例は一挙に膨大なものとなった。これらは S^1 作用をもつ自己双対計量の大きな部分を占めるものと考えられるが、こうした自己双対計量はMoishezonツイスター空間を持つとは限らないため、すべてを尽くしているわけでない。

(2) 「LeBrunツイスター空間に関する研究」について
論文④において、LeBrunツイスター空間の多重半反標準形に関する研究を行い、その次元公式を与え、一般元の構造を決定した。論文②に於いては、同じく LeBrun ツイスター空間について、その退化の研究を行い、次の 3 通りの基本的な退化においてツイスター空間で起こっている幾何学的な状況を明らかにした：(a) monopole pointのうち一点が無限遠に離れていく場合（連結和の言葉で言えば、nCP^2 が $(n-1)CP^2$ と CP^2 に退化する場合)、(b) monopole point が一点に集中する場合、(c) 双曲空間の曲率が0に近づく場合。結果はいずれも退化を具体的に記述するものである。

(3) 「ミニツイスター空間と 3 次元 Einstein-Weyl 多様体の間の Hitchin 対応の大域化」について
論文③（中田文憲氏との共同）に於いて、表題の対応を実現した。より詳しく、次の結果を得た。本来のミニツイスター空間は自己交点数が2の非特異有理曲面をもつ非特異複素曲面として定義されるが、それを、自己交点数が n の有理曲線で(n-2)個の通常二重点をもつものが存在する複素曲面、として一般化した。そしてこの意味でのミニツイスター空間に対して、上記の有理曲線のなす空間が自然なEinstein-Weyl構造を持つことを示した。さらに、この意味でのミニツイスター空間が大量に存在することを、Joyce 計量に付随するミニツイスター空間を具体的に構成すること、およびそれとは別に抽象的に構成することにより、示した。論文⑤は論文③よりも先に書かれたものであり、上の記号で n=3 となる場合のミニツイスター空間の構造とそのモジュライ空間を詳しく調べている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）
①以外のいずれの論文も下記のホームページからアクセス可能：
http://www.math.tohoku.ac.jp/~honda/index.html

① N. Honda, Twistor spaces and self-dual metrics Sugaku Expositions 24 (2011), no. 1, 123-143（査読有り）
② N. Honda, ″Degenerations of LeBrun twistor spaces.″ Comm. Math. Phys. 301 (2011) no.3, 749-770（査読有り）
③ N. Honda and Fuminori Nakata, ″Minitwistor spaces, Severi varieties, and Einstein-Weyl structure.″ Ann. Global Anal. Geom. 39 (2011) no.3. 293-323（査読有り）
④ N. Honda, ″On pluri-half-anticanonical system of LeBrun twistor spaces.″ Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 2051-2060（査読有り）
⑤ N. Honda, ″New examples of minitwistor spaces and their moduli space.″ Osaka J. Math. 47 (2010) 717-730. （査読有り）
⑥ N. Honda, ″A new series of compact minitwistorspaces and Moishezon twistor spaces over them.″ J. reine angew. Math. 642 (2010), 197-235. （査読有り）
⑦ N. Honda, ″Explicit construction of new Moishezon twistor spaces.″ J. Differential Geom. 82 (2009) no.2, 411-444. （査読有り）
⑧ N. Honda, On a construction of the twistor spaces of Joyce metrics, II. J. Math. Soc. Japan. 61. (2009) no.4, 1243-1260（査読有り）

〔学会発表〕（計　１６　件）
① 本多宣博「4CP2 上のMoishezonツイスター空間の分類」日本数学会 2012 年年会 2012年3月26日　東京理科大学
② 本多宣博``Toward classification of Moishezon twistor spaces″　藤木明先生退職記念研究集会　2012 年 3 月 22 日 大阪大学大学院理学研究科
③ 本多宣博``Deformation of LeBrun's ALE metric with negative mass''　仙台小研究集会　2012年3月16日 東北大学大学院理学研究科
④ Nobuhiro Honda ``Geometry of twistor spaces'' Colloquium at Department of Mathematics, Fudan University 2011年12月1日　上海、中国
⑤ Nobuhiro Honda ``Double solid twistor spaces″ 第１７回複素幾何シンポジウム

2011年11月9日 長野県菅平高原
⑥ 本多宣博``Classification of Moishezon twistor spaces on 4CP^2″ 東京大学複素解析幾何セミナー 2011年10月31日 東京大学大学院数理科学研究科
⑦ 本多宣博``Classification of algebraic twistor spaces on 4CP^2'' 京都大学微分トポロジーセミナー 2011年2月10日 京都大学大学院理学研究科
⑧ 本多宣博「Moishezon ツイスター空間について」大阪大学数学教室談話会 2010年12月6日大阪大学大学院理学研究科
⑨ 本多宣博``Geometry of generic Moishezon twistor spaces on 4CP^2'' 大阪大学数学教室幾何セミナー 2010年12月6日 大阪大学大学院理学研究科
⑩ 本多宣博``Geometry of generic Moishezon twistor spaces on 4CP^2'' 東北大学数学教室幾何セミナー 2010年11月9日 東北大学大学院理学研究科
⑪ 本多宣博「自己双対多様体のツイスター空間について」日本数学会2010年度秋季総合分科会幾何学分科会特別講演 2010年9月24日 名古屋大学
⑫ Nobuhiro Honda ``The minitwistor spaces of Joyce metrics'' Geometry Seminar, Department of Mathematics, Tsinghua University 2010年9月14日 北京（中国）
⑬ Nobuhiro Honda ``Generic Moishezon twistor spaces on 4CP^2'' The 6th Geometry Conference for Friendship of China and Japan 2010年9月4日 西安（中国）
⑭ 本多宣博「自己双対計量とツイスター空間」 幾何学阿蘇研究集会 2010年8月29日, 30日 休暇村 南阿蘇 （阿蘇くじゅう国立公園）
⑮ 本多宣博「Joyce 計量から生じるミニツイスター空間」第57回幾何学シンポジウム 2010年8月9日 神戸大学
⑯ 本多宣博, Degenerations of LeBrun twistor spaces, 筑波大学微分幾何学研究集会 2009年12月19日 筑波大学

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.tohoku.ac.jp/~honda/index.html

６．研究組織
(1)研究代表者
本多 宣博（HONDA NOBUHIRO）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：60311809

(2)研究分担者
（ ）

研究者番号：

(3)連携研究者
（ ）

研究者番号：