

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 18 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740044

研究課題名（和文） トレリ群とラグランジュ型写像類群のコホモロジー環の構造

研究課題名（英文） Structures of the cohomology rings of the Torelli group and Lagrangian mapping class groups

研究代表者

逆井 卓也（SAKASAI TAKUYA）

東京工業大学・大学院理工学研究科・助教

研究者番号：60451902

研究成果の概要（和文）：ラグランジュ型写像類群と呼ばれる曲面の写像類群の部分群の構造を調べる際に重要な役割を果たす写像類群の Johnson-Morita 理論に関連して、有理第 5, 6 Johnson 準同型の像を決定した。また、Johnson 準同型と関連するいくつかの Lie 代数について、それらのアーベル化の計算を中心とした構造の解析を行った（森田茂之氏、鈴木正明氏との共同研究）。その中で「associative case」と呼ばれる状況においてはアーベル化を完全に決定し、その応用としてリーマン面のモジュライ空間の最高次有理ホモロジー群が消滅するという結果を得た。

研究成果の概要（英文）：Johnson-Morita theory plays an important role in the study of subgroups of mapping class groups of surfaces called Lagrangian mapping class groups. We determined the images of the rational fifth and sixth Johnson homomorphisms and studied the structures of related Lie algebras (Joint work with Shigeyuki Morita and Masaaki Suzuki). In particular, we determined the abelianization of so-called “the associative case” and showed that the highest rational homology group of the moduli space of Riemann surfaces vanish.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何，写像類群，トレリ群，Johnson 準同型

1. 研究開始当初の背景

曲面の写像類群は幾何，代数，函数論，数理論物理など数学の様々な場面に現れる基本的かつ重要な対象であり，位相幾何の視点からは，写像類群は曲面束の理論をはじめ，Heegaard 分解や写像トーラスなどを通じて 3 次元多様体論と深い関連を持っている。

とくに，写像類群の（有理）コホモロジーは曲面束の特性類を与えると同時に，リーマン面のモジュライ空間という歴史的にも重要な空間のコホモロジーを与えることが知られている。2002年に Madsen と Weiss により，写像類群の有理コホモロジー環は安定的には Morita-Miller-Mumford 類（以下 MMM 類と略す）と呼ばれるものたちによっ

て生成される多項式代数と一致することが示されたが、その振る舞いに関しては未だによくわからない部分が多い。とくに、このことに関連する、20年ほど前から懸案となっている問題として、「偶数番目の MMM 類はトレリ群に制限しても非自明か？」というものがある。有理数係数のときに、奇数番目の MMM 類がトレリ群上で自明であることは知られている。ここでトレリ群とは、写像類群の代表的な部分群であって、Johnson による先駆的な仕事をきっかけとして、今日 Johnson-Morita 理論として写像類群を調べる上で不可欠な理論が構成される出発点となった群である。そのような重要性にも関わらず、有限表示可能性の決定も含め、トレリ群には重要な問題が多く残っており、しかも、足がかりとなるような事実がまだ少ないということが研究者たちの間で認識されていた。

2. 研究の目的

上記のような状況において、本研究ではラグランジュ型写像類群と呼ばれる写像類群とトレリ群の中間に位置する部分群たちを調べることによってトレリ群の構造に迫る、という新しいアプローチを行おうとするものであった。具体的問題として

- (1) ラグランジュ型写像類群が有限表示可能かどうかを決定する。
- (2) カップ積によるラグランジュ型写像類群の高次のコホモロジー類の構成。
- (3) MMM 類がラグランジュ型写像類群上で生き残るかどうかを決定する。
- (4) ラグランジュ型写像類群に特化した Johnson-Morita 理論の精密化を行い、非安定コホモロジー類を構成する。

を設定していた。

3. 研究の方法

(1) 上記の4つの問題は原則としてそれぞれ独立に進めることができるが、(3)、(4)については(1)、(2)の結果に依存する部分もあるため、まずは(1)、(2)から取り組み、進展に応じて(3)、(4)に取り組んでいった。研究を進めるにあたっては、Johnson-Morita 理論における具体的で大量の計算を行うため、数式処理ソフトウェア Mathematica を用いて一連のプログラムを作成し、それを実行することでいくつかの結果を得た(雑誌論文③)。最終年度では森田茂之氏、鈴木正明氏(秋田大学)との直接の議論の場を定期的に設け、具体的な計算を行うとともに、それから得られた知見を用いて理論的考察を進め

ていった。

(2) 研究発表のため、チャーン研究所(中国)、オーフス大学(デンマーク)、ボン大学(ドイツ)、Centre de Recerca Matematica, Bellaterra(スペイン)、Oberwolfach 数学研究所(ドイツ)を訪問し、そこで行われた国際学会やセミナーにおいて講演を行った。加えて、現地の数学者と議論を通じて様々な知見を得るとともに、最新の情報の収集を行った。国内においてもいくつかの研究集会にて招待講演を行った。

(3) 本研究に関連して、2011年3月に「Spring School: Moduli Spaces and Characteristic Classes」というタイトルの研究集会を開催し、その後で招待講演者と議論を行う予定で準備を進めていたが、震災の影響により中止となってしまった。

4. 研究成果

本研究をまとめた論文の中で主たるものは雑誌論文①であり、1次のホモロジー群の決定や2次の部分の評価、有理数係数において奇数番目の MMM 類がラグランジュ型写像類群上ですべて消滅することなど含む高次の部分についての考察がまとめられている。以下、「研究の目的」欄で挙げた具体的問題に対する成果を具体的に述べる。

(1) ラグランジュ型写像類群が有限表示可能かどうかという問題については、その群が作用するいくつかの複体の構造を調べたものの、残念ながら解答を得ることができなかった。しかしながら、その複体に関する知見により、(4)の③の項の背後にある理論の理解の大きな手助けとなった。

(2) 1次のコホモロジー群のカップ積として得られるコホモロジー類については、組み紐群のコホモロジー環の構造との比較を通じて十分に多くの非自明な元が得られることがわかった。この内容は雑誌論文①にまとめられている。

(3) 有理数係数において奇数番目の MMM 類がラグランジュ型写像類群上ですべて消滅するという結果を得ることができたが、この結果をまとめたプレプリントを発表した同時期に J. Giansiracusa と U. Tillmann によって直接的な関連を持つ内容のプレプリントが発表された。その論文の結果との比較を行うことで、得られた結果をより幾何的に解釈することができた。また、偶数番目の MMM 類の振る舞いについて彼らと意見交換を行った。なお、偶数番目の MMM 類のラグ

ランジュ型写像類群上の振る舞いについては、当初の計画では3つのステップを想定していたが、2010年度の6月にA. Hatcherによって報告された結果を用いると、その最初のステップが解決されることがわかり、議論の詳細に関する情報を集めるとともに（しかしながら論文は本研究期間終了の時点でも未発表）、関連している事項の学習を行った。

(4) この問題については内容をさらに細かく分けて報告する。

① 第2 Johnson 準同型の像空間の加群としての構造を、これまでに知られていた横溝勇次氏の結果を踏まえて、グラフを用いて記述し直した。その成果は今後の研究へと繋がっていくステップであるとともに、東京農工大学の合田洋氏と共同で行っている、Johnson-Morita 理論の結び目理論への応用の研究において重要な役割を果たした（雑誌論文③）。

② 2010年度に発表された榎本-佐藤の障害の理論を利用して、写像類群の有理第5 Johnson 準同型の像を決定した。それに引き続き、森田茂之氏、鈴木正明氏との共同研究により、有理第6 Johnson 準同型の像を決定することに成功した。その中で、第5までの Johnson 準同型の像を決定する際に見られなかった、榎本-佐藤の障害では判定できない項が存在することを直接的な方法により証明した。このような現象はより高次の場合にも現れることが考えられ、今後更に精密な判定方法が必要となることがわかった。

③ Johnson 準同型の像のなすリー代数と密接な関係を持ついくつかの Lie 代数に関して、そのアーベル化の計算を行った（森田茂之氏、鈴木正明氏との共同研究）。とくに「associative case」と呼ばれる状況においてはアーベル化を完全に決定し、その応用としてリーマン面のモジュライ空間の最高次有理ホモロジー群が消滅するという重要な結果を得た。以上の結果を論文にまとめ、プレプリントとして発表した。また、「Lie case」と呼ばれる状況についても、アーベル化に現れる新たな項の具体的な記述を与えた。この場合のアーベル化の完全な記述については更なる研究が必要である。

以上に加えて A. Papadopoulos 氏が編集をしている「Handbook of Teichmüller theory」という本に当研究内容に関連したサーベイ論文を書く機会を与えられ、その論文を執筆した。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① Takuya Sakasai, Lagrangian mapping class groups from a group homological point of view, Algebraic & Geometric Topology, 査読有, 12 (2012), 267-291.

② Hiroshi Goda, Takuya Sakasai, Homology cylinders and sutured manifolds for homologically fibered knots, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, 印刷中. (2012)

③ Takuya Sakasai, A survey of Magnus representations for mapping class groups and homology cobordisms of surfaces, Handbook of Teichmüller theory, 査読無, 3 巻, 印刷中. (2012)

④ Hiroshi Goda, Takuya Sakasai, Johnson homomorphisms as fibering obstructions of homologically fibered knots, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1747 (2011), 47-66.

⑤ Hiroshi Goda, Takuya Sakasai, Factorization formulas and computations of higher-order Alexander invariants for homologically fibered knots, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 査読有, 20 (2011), 1355-1380.

⑥ Hiroshi Goda, Takuya Sakasai, Abelian quotients of monoids of homology cylinders, Geometriae Dedicata, 査読有, 151 (2011), 387-396.

〔学会発表〕（計 10 件）

① 逆井 卓也, 曲面の写像類群と自由結合代数のシンプレクティック微分リー代数 I, II, 第6回 福岡・札幌幾何学セミナー, 2012年2月20, 21日, 九州大学西新プラザ.

② 逆井 卓也, 自由結合代数のシンプレクティック微分のなすリー代数のアーベル化とその応用, 東京理科大学理工学部数学科談話会, 2011年12月9日, 東京理科大学.

③ Takuya Sakasai, The Magnus representation and homology cobordism groups of homology cylinders, GCOE workshop “Circle valued Morse theory and Alexander invariants”, 2011年11月18日, 東京大学.

④ 逆井 卓也, 自由リー代数のシンプレクティック微分のなすリー代数の構造について, トポロジーとコンピュータ 2011, 2011年11月14日, 名城大学名駅サテライト.

⑤ Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, Masaaki Suzuki, On a structure of the symplectic derivation Lie algebra of free

Lie algebra (ポスター発表), Todai Forum 2011 “Geometry and Dynamics”, 2011年10月17日, École normale supérieure de Lyon (フランス).

⑥ 逆井 卓也, 鈴木 正明, 自由結合代数の微分のなすリー代数のアーベル化, リーマン面に関連する位相幾何学, 2011年9月3日, 東京大学.

⑦ Takuya Sakasai, Johnson homomorphisms in knot theory, Teichmueller theory, 2010年12月3日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (ドイツ).

⑧ Takuya Sakasai, The Magnus representation and the homology cobordism group of homology cylinders, Teichmueller theory and its Interactions in Mathematics and Physics, 2010年7月1日, Centre de Recerca Matematica, Bellaterra (スペイン)

⑨ Takuya Sakasai, Homology cylinders and knot theory, GCOE and Horiba International Symposium “Knots, Contact Geometry and Floer Homology”, 2010年5月24日, 東京大学.

⑩ Takuya Sakasai, Lagrangian mapping class groups from group homological point of view, International Conference on Loops, strings and moduli spaces, 2009年8月3日, 南開大学 (中国).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

逆井 卓也 (SAKASAI TAKUYA)

東京工業大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号: 60451902