

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月 1日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21740045

研究課題名（和文） 四面体分割からみた結び目と3次元多様体の不変量の研究

研究課題名（英文） 3-manifold invariants as viewed from triangulations

## 研究代表者

古宇田 悠哉 (KODA YUYA)

東北大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：20525167

## 研究成果の概要（和文）：

3次元 Seifert 多様体の Seifert ファイバー構造から決まる Spin-c 構造の Reidemeister-Turaev トーション, 3次元球面内のツイスト結び目, およびレンズ空間内のトーラス結び目の色つき Turaev-Viro 不変量, さらに レンズ空間内のツイスト結び目の複雑度とその結び目で分岐する被覆空間の双曲構造について, 3次元多様体のある構造付きの四面体分割を用いて記述し, 公式を得た.

## 研究成果の概要（英文）：

Using triangulations equipped with certain additional structures, we obtained formulae for the Reidemeister-Turaev torsion of standard Spin-c structures for Seifert fibered 3-manifolds and colored Turaev-Viro invariants for twist knots in the 3-spheres and torus knots in lens spaces. Moreover, we gave an upper bounds of the complexities for the twist knots in lens spaces and described the hyperbolic structures of their strongly cyclic branched covering spaces.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：3次元多様体, 四面体分割, 絡み目, 量子不変量

## 1. 研究開始当初の背景

Moise による 3次元多様体の Hauptvermutung の肯定的解決, Perelman による 3次元幾何化予想の肯定的解決により, 3次元多様体の組合せ構造が多様体の各ピースへの分解とそれぞれの幾何構造をも決

めることが判明した. この背景のもと, 3次元多様体論においては「多様体の幾何構造や微分相構造およびこれらから定まる不変量を, 組み合わせ的に解析すること」をスローガンにして研究することが可能になり, またその重要性が明らかになった.

## 2. 研究の目的

3次元多様体の四面体分割, および3次元多様体内の結び目や3次元多様体上のスピン  $c$  構造をエンコードする構造付きの四面体分割を構成し, これにより計算される量子不変量, Reidemeister-Turaev トーション, 双曲体積などの不変量に関する性質を調べる.

## 3. 研究の方法

3次元多様体内の結び目や3次元多様体上のスピン  $c$  構造は, 分岐構造を持ったスパイン (唯一つの頂点を持つ四面体分割の双対) で効率的にエンコードすることができる. 本研究では, 分岐構造を持ったスパインをシステムティックに構成するために, Heegaard 分解を用いる. 具体的には, 3次元多様体の Heegaard 曲面と, その両側のハンドル体の完備メリディアン円盤系の和集合から, Heegaard 曲面上の一部の領域を取り除くことで分岐構造を持ったスパインを構成し, 対応する Heegaard 図式の言葉で不変量の性質の記述を試みる.

## 4. 研究成果

スピン  $c$  構造をエンコードする構造付きの四面体分割, さらにこれに同調する

Heegaard 分解を概念的に用いて

Reidemeister-Turaev トーションを導出する手法を整備し, 3次元 Seifert ファイバー多様体の Seifert パラメータを入力すると, そのファイバーに対応するスピン  $c$  構造, および, スピン構造からくるスピン  $c$  構造の Reidemeister-Turaev トーションを出力するアルゴリズムが得られた. この方法で不変量の計算を試みた結果, ファイバーに対応するスピン  $c$  構造の

Reidemeister-Turaev トーションは, 一般のスピン  $c$  構造の場合に比べてはるかに標準的といえる値をとることが分かった.

Barrett, Garcia-Islas と Martins の 3 氏は, 3次元多様体内のグラフ量子不変量である色つき Turaev-Viro 不変量を定義した.

この不変量について, まず 3次元球面内のツイスト結び目に対して, それと同調する Heegaard 分解を用いて四面体分割を構成し, 公式を得た. さらに, 色つき Turaev-Viro 不変量を (2+1)次元 TQFT の観点からとらえなおし, 3次元レンズ空間内の Heegaard 分解を与えるトーラスの上に乗ったグラフの CTV の公式を導き, その漸近的な振る舞いについて数値実験を行った. ここで, 3次元多様体の四面体分割をそのまま用いると上の対応はセミファンクターにしかならないが, その双対概念の拡張であるスパインを用いると, きちんとファンクターになることがポイントであった.

3次元多様体の四面体分割に必要な四面体の数をその 3次元多様体の複雑度と呼ぶ. 複雑度は連結和に関して加法性を持ち, 有限個の多様体からなるフィルトレーションを与えることから, 特に 3次元多様体の数え上げと分類の観点から重要である. 複雑度は, 現在では多くの研究者により, 絡み目, 空間グラフ, 3次元軌道体, 4次元組み合わせ多様体などの複雑度に拡張され, 各対象に数え上げと分類の視点をもたらしめている. 本研究では 3次元多様体内の絡み目の複雑度を拡張し, 各自然数  $s$  に対して絡み目の  $s$ -複雑度というものを, 組み合わせ的に定義した. また, Heegaard 種数を分岐スパインの特異点の近傍の言葉で再定義した以前の研究に基づき, 絡み目のブロック数という不変量を定義した. 3次元球面内の絡み目に対して, これらの組み合わせ的不変量が, 絡み目の橋数・トンネル数と深い関係を持つことを示した. 同時に双曲結び目の強巡回被覆のスパインを構成し, 双曲構造に関する考察を行った.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者に

は下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Sangbum Cho, Yuya Koda, Topological symmetry groups and mapping class groups for spatial graphs, Michigan Mathematical Journal, 査読有, **62** (2013), 131-142, <http://projecteuclid.org/DPubS?verb=Display&version=1.0&service=UI&handle=euclid.mmj/1363958244&page=record>.
- ② Yuya Koda, Taiji Taniguchi, (2+1)-dimensional TQFT model for Colored Turaev-Viro invariants, International Mathematics Research Notices. IMRN **2013**, 査読有, (2013), 218-242, DOI: 10.1093/imrn/rnr238.
- ③ Yuya Koda, The Reidemeister-Turaev torsion of standard  $\text{Spin}^c$  structures on Seifert Fibered 3-manifolds, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques. Série 6 **21**, 査読有, (2012), 745-768, doi: 10.5802/afst.1349.
- ④ Yuya Koda, Links and spines, Journal of Knot Theory and its Ramifications **21**, 査読有, 1250027 (2012) [27 pages] DOI: 10.1142/S0218216511009674.
- ⑤ Yuya Koda, Tunnel complexes of 3-manifolds, Algebraic & Geometric Topology **11**, 査読有, (2011), 417-447, DOI: 10.2140/agt.2011.11.417.
- ⑥ Yuya Koda, Colored Turaev-Viro invariants of twist knots, Topology and its Applications **156**, 査読有, (2009), 577-593, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864108002897>.

[学会発表] (計 23 件)

- ① Yuya Koda, Primitive disk complexes and genus two Goeritz groups of all lens spaces, Seminari di Geometria, Università di Pisa, 2012 年 9 月 19 日, イタリア.
- ② 古宇田悠哉, ハンドル体結び目のシンメトリー群, Spring Workshop 2012 on Low-Dimensional Topology and its Ramifications Joint Workshop 「ハンドル体結び目とその周辺 I V」, 名城大

学名駅サテライト, 2012 年 3 月 4 日, 名古屋.

- ③ 古宇田悠哉, 3 次元球面内のグラフとハンドル体の対称性について, 東北大学幾何セミナー, 東北大学, 2011 年 10 月 17 日, 仙台.
- ④ 古宇田悠哉, Automorphisms of the 3-sphere that preserve spatial graphs and handlebody-knots, 早大理工トポロジーセミナー, 早稲田大学, 2011 年 8 月 29 日, 東京.
- ⑤ Yuya Koda, Automorphisms of the 3-sphere that preserve spatial graphs and handlebody-knots, Oberseminar Geometrie, Topologie und Analysis, University of Cologne, 2011 年 6 月 24 日, ドイツ.
- ⑥ 古宇田悠哉, Automorphisms of the 3-sphere that preserve knotted handlebodies of genus two, 広島大学トポロジー・幾何セミナー, 広島大学, 2011 年 1 月 25 日, 東広島.
- ⑦ 古宇田悠哉, Automorphisms of the 3-sphere that preserve knotted handlebodies of genus two, 上智トポロジー研究集会, 上智大学, 2010 年 12 月 25 日, 東京.
- ⑧ Yuya Koda, On the Reidemeister-Turaev torsion of standard  $\text{Spin}^c$  structures on Seifert fibered 3-manifolds, 京都大学数理解析研究所 合宿型セミナー "Twisted topological invariants and topology of low-dimensional manifolds", あきた白神体験センター, 2010 年 9 月 15 日, 秋田.
- ⑨ 古宇田悠哉, Introduction to colored Turaev-Viro invariants, Workshop: Lefschetz fibration and category theory, 大阪大学, 2010 年 6 月 26 日, 大阪.

- ⑩ 古宇田悠哉, Quotients of disk complexes by group actions, 研究会「結び目と3次元多様体」, 慶應義塾大学, 2010年3月18日, 横浜.
- ⑪ 古宇田悠哉, Quotients of disk complexes by Goeritz group actions, 東北大学幾何セミナー, 東北大学, 2009年11月24日, 仙台.
- ⑫ Yuya Koda, Colored Turaev-Viro invariants of twisted double-series and cable-series in lens spaces, 研究会「The first KOOK-TAPU Joint Seminar (TOP Seminar) on Knot Theory and Related Topics」, 大阪市立大学, 2009年8月19日, 大阪.
- ⑬ Yuya Koda, Tunnel complexes of 3-manifolds, Workshop "Simplicial Complexes Arising in Low-Dimensional Topology", 東京工業大学, 2009年7月3日, 東京.
- ⑭ 古宇田悠哉, 3次元多様体のトンネル複体について, 研究会「ハンドル体結び目とその周辺 II」, 大阪市立大学, 2009年6月20日, 大阪.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~koda/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

古宇田 悠哉 (KODA YUYA)  
東北大学・大学院理学研究科・助教  
研究者番号: 20525167

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号: