

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年6月1日現在

機関番号：32652

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740046

研究課題名（和文） 空間グラフの代数的トポロジーに根ざした不変量の研究

研究課題名（英文） Research of spatial graph invariants based on algebraic topology

研究代表者

新國 亮（NIKKUNI RYO）

東京女子大学・現代教養学部・准教授

研究者番号：00401878

研究成果の概要（和文）：(1) 空間グラフの Alexander 不変量の研究を行ない，補空間の基本群の無限巡回群への準同型に関する Alexander 行列の初等イデアルに関する成果を得た．(2) 空間グラフの有限型不変量による分類の研究を行ない，空間シータ曲線及び空間4頂点完全グラフの各種分類定理を得た．(3) グラフの結び目及び絡み目内在性の研究を行ない，整数版 Conway-Gordon 型定理，及び新種の非自明内在性の発見等の成果を挙げた．

研究成果の概要（英文）：(1) We obtained the result about Alexander invariants of spatial graphs, in particular, the elementary ideals of Alexander matrix with respect to a homomorphism from the fundamental group of the spatial graph complement to the infinite cyclic group. (2) We gave several classification theorems for spatial theta curves and spatial complete graph on four vertices by the finite type invariants. (3) We obtained the result about the intrinsic knottedness and linkedness for graphs, in particular, an integer-version of the Conway-Gordon type theorem and a new kind of intrinsic nontriviality for graphs.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：低次元トポロジー，空間グラフ，結び目，絡み目，不変量

## 1. 研究開始当初の背景

空間グラフの分類問題に代表される大域的研究，及び結び目や絡み目の内在性に代表される複雑度の研究は，ともに結び目や絡み目とは異なる現象を有することをその動機とする重要な課題である。2000年代中盤頃まで

は，いずれの研究においても，結び目理論の既知の事実とグラフ理論による組み合わせ的手法が主流となっていたが，2000年代後半にかけて，代表者は空間グラフの正則射影図の平面的トポロジーに着目し，代数的トポロジーの観点から研究を進めるという着想に至った。代数的トポロジーの手法は全ての空

間グラフに適用できるという利点を持ち、空間グラフの統一的取り扱いに際して非常に有効である。特に研究開始当初は、既に空間グラフの補空間の基本群や配置空間のコホモロジー群などから得られる古典的な代数的不変量の応用による成果を積み上げつつあり、更なる現代的かつ本質的な進展が望まれる状況であった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、空間グラフに特有のトポロジカルな性質を、特に代数的トポロジーに根ざした不変量を用いて解明することであり、具体的には以下の2つを柱に据えた。

(1) 空間グラフの研究においては、グラフ毎にそれぞれの結び目理論が存在し、それらの統一的な取扱いは重要なテーマである。そこで、全ての空間グラフに定義でき、かつ実際に計算可能な不変量として、代数的トポロジーの手法により定義される不変量を考え、その応用を見出す。

(2) 空間グラフの補空間の基本群は、全ての空間グラフに定義される不変量として知られている。特に結び目や絡み目の場合は良く研究されており、補空間の基本群から Alexander 不変量などの代数的不変量が組織的に導かれ、多くの優れた応用がある。そこで、結び目や絡み目とは限らない空間グラフの補空間の基本群から各種代数的不変量を導出し、その応用を見出す。

## 3. 研究の方法

(1) 任意の空間グラフには、それを変形レトラクトとして内部に持つ有向コンパクト曲面が付随し、特に空間シート曲線及び空間4頂点完全グラフの場合、この付随曲面で Seifert 絡み形式の消えたものは3次元球面のアンピエント・イソトピーで一意的である (Kauffman-Simon-Wolcott-Zhao)。そこで空間シート曲線及び空間4頂点完全グラフにおいて、それらの一意的な付随曲面の境界の連結成分として得られる結び目の有限型不変量をもとの空間グラフの不変量として採用し、分類問題に応用することを考えた。

(2) 不足度1の有限表示群の無限巡回群への準同型に関する Alexander 行列の1番初等イデアルが常に単項イデアルとなることは良く知られている (Fox)。結び目群、即ち結び目の補空間の基本群は不足度1の表示を持つのでそれを応用できて、特に結び目群のアーベル化に関する Alexander 行列の1番初等イデアルの生成元が Alexander 多項式である。

一方、結び目や絡み目とは限らない空間グラフの補空間の基本群の不足度  $d$  は一般に1以上である。そこで、不足度が自然数  $d$  の有限表示群の無限巡回群への準同型に関する Alexander 行列の  $d$  番初等イデアルの生成系を調べて、空間グラフの補空間の基本群に適用することを考えた。

(3) グラフは、その任意の空間埋め込みの像が非分離絡み目を含むとき絡み目内在と呼ばれ、一方非自明結び目を含むとき結び目内在であると呼ばれる。空間グラフのホモロジー不変量と、空間グラフ内の結び目の不変量との間の深い関係が、本橋-谷山、谷山-安原、新國らにより明らかにされている。そこで、グラフに部分グラフとして含まれる絡み目内在グラフたちの位置関係やグラフの1次元ホモロジーを駆使して、空間グラフ内の2成分絡み目の絡み数を調べて空間グラフ内の結び目の不変量の情報を引き出し、結び目内在グラフの研究に応用した。

## 4. 研究成果

(1) 安原 晃氏(東京学芸大学)との共同研究により、空間シート曲線の  $C_5$  分類、及び空間4頂点完全グラフの  $C_5$  分類を、それぞれ具体的な代数的不変量の族によって与えた。ここで自然数  $k$  に対し、空間グラフ上の  $C_k$  変形とは、Goussarov, 葉廣によって独立に導入された局所変形であり、2つの空間グラフが  $C_k$  同値であるとは、それらが有限回の  $C_k$  変形とアンピエント・イソトピーで移り合うときをいう。系として、5以上の自然数  $k$  に対し、2つの空間シート曲線(もしくは2つの空間4頂点完全グラフ)が  $C_k$  同値であるための必要十分条件は、それらの次数  $k-1$  以下の有限型不変量が一致することであることを示した。

(2) グラフの Heawood 族とは、7頂点完全グラフ  $K_7$  から有限回の  $Y$  変換、もしくは  $Y$  変換と呼ばれる操作で得られるグラフの同型類全体の集合をいう。 $K_7$  から  $Y$  変換のみで得られるグラフは結び目内在であるが (Motwani-Raghunathan-Saran)、一方、 $Y$  変換と  $Y$  変換の両方を用いて得られるグラフで結び目内在でないものが存在することが指摘されていた (Flapan-Naimi)。そこで花木 良氏(奈良教育大学)、谷山 公規氏(早稲田大学)、山崎 晶子氏(東京女子大学)との共同研究により、Heawood 族に属するグラフが結び目内在であるための必要十分条件は、そのグラフが  $K_7$  から  $Y$  変換のみで得られることを示し、更に  $K_7$  から  $Y$  変換のみで得られないグラフは、その空間埋め込みの像が必ず非自明な結び目か、

またはどの2成分部分絡み目も分離不能であるような3成分絡み目を含むことを示した。

(3) 佐藤 友美氏(東京女子大学)との共同研究により、一般に不足度が自然数  $d$  の有限表示群の無限巡回群への準同型に関する Alexander 行列の  $d$  番初等イデアルの生成系を具体的に1つ求めた。この生成系は、もとの有限表示群の生成元が  $n$  個ならば、高々  ${}_n\mathcal{C}_{d-1}$  個の元から成り、不足度1の有限表示群の無限巡回群への準同型に関する Alexander 行列の1番初等イデアルが常に単項イデアルとなるという Fox の定理の一般化となっている。

(4) 佐藤 友美氏(東京女子大学)との共同研究により、3以上の自然数  $n$  に対し、鈴木の空間  ${}_n$  曲線と呼ばれる空間グラフについて、その補空間の基本群の、無限巡回群へのある準同型に関する Alexander 行列の初等イデアルを完全に決定した。これは、鈴木空間  ${}_n$  曲線の補空間の基本群の、周期  $n$  の巡回群への準同型に関する初等イデアルの鈴木による計算結果(鈴木)の拡張であり、系として、この準同型に関する鈴木空間  ${}_n$  曲線の(1変数)Alexander 多項式が、3以上の任意の自然数  $n$  について得られた。

(5) 任意の空間6頂点完全グラフについて、その絡み目成分の絡み数の総和は2を法として1であり、また、任意の空間7頂点完全グラフについて、全ての頂点を含む絡み目成分の Conway 多項式の2次の係数の総和も2を法として1であることは、それぞれ Conway-Gordon の定理として良く知られており、更に新國によって、その整数上への精密化公式も得られている。そこで谷山 公規氏(早稲田大学)との共同研究により、6頂点完全グラフ及び7頂点完全グラフに  $Y$  変換を有限回施すことで得られるそれぞれのグラフについて、Conway-Gordon 型定理、及びその整数上への精密化公式を与えた。

(6) 6頂点完全グラフ  $K_6$  に  $Y$  変換及び  $Y'$  変換を有限回施して得られるグラフの同型類の集合を Petersen 族といい、ちょうど7つのグラフからなる。これら7つの任意のグラフの空間埋め込みの像の絡み目成分の絡み数の総和は必ず奇数であることが Conway-Gordon 及び Sachs らによって示されており、更に7つ中3つのグラフについて、その整数上への精密化公式が、新國、O'Donnol, 新國-谷山によって、絡み目成分の絡み数の2乗と結び目成分の Conway 多項式の2次の係数を用いて具体的に記述されていた。そこで橋本 広香氏(東京女子大学)との共同研究により、残り4つのグラフについ

ても、同様の整数上への精密化公式を具体的に与えた。

(7) 完全4部グラフ  $K_{3,3,1,1}$  の空間埋め込みの像が必ず非自明結び目を含むことは Foisy によって示されていたが、橋本 広香氏(東京女子大学)との共同研究により、 $K_{3,3,1,1}$  の空間埋め込みに対し、絡み目成分の絡み数の2乗と結び目成分の Conway 多項式の2次の係数を用いた整数上の従属関係式を与えることで Foisy の結果を精密化した。また、 $K_{3,3,1,1}$  に有限回の  $Y$  変換を施して得られる26個のグラフについても同様の従属関係式を得た。系として、 $K_{3,3,1,1}$  の任意の直線型空間埋め込みの像は、全ての頂点を含む非自明結び目を必ず含むことを示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Ryo Nikkuni and Kouki Taniyama,  $Y$ -exchanges and the Conway-Gordon theorems, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 査読有, Vol. 21, No. 7, 2012, pp.1250067-1--4.

Ryo Hanaki, Ryo Nikkuni, Kouki Taniyama and Akiko Yamazaki, On intrinsically knotted or completely 3-linked graphs, Pacific Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 252, No. 2, 2011, pp. 407--425.

Ryo Nikkuni, A refinement of the Conway-Gordon theorems, Topology and its Applications, 査読有, Vol. 156, No. 17, 2009, pp. 2782--2794.

[学会発表](計 13 件)

橋本 広香, 新國 亮(発表者), On invariants of knots and links in a spatial complete four-partite graph  $K_{3,3,1,1}$ , The Eighth East Asian School of Knots and Related Topics, Korea Advanced Institute of Science and Technology (Daejeon, Korea), 2012年1月10日

橋本 広香(発表者), 新國 亮, On Conway-Gordon type theorems for graphs in the Petersen family, The Eighth East Asian School of Knots and Related Topics, Korea Advanced Institute of Science and Technology (Daejeon, Korea), 2012年1月9日

橋本 広香(発表者), 新國 亮, 空間完全 4 部グラフ  $K_{3,3,1,1}$  内の結び目と絡み目の不変量について, 研究集会「結び目の数学 IV」, 東京女子大学 (東京), 2011 年 12 月 25 日

新國 亮(発表者), 空間グラフ内の結び目と絡み目の不変量について, 研究会「2011 琉球結び目セミナー」, 那覇市伝統工芸館会議室 (那覇), 2011 年 9 月 7 日

新國 亮(発表者), Conway-Gordon の定理とその周辺, 第 7 回組合せ論若手研究集会, 慶應義塾大学 (横浜), 2011 年 2 月 21 日

新國 亮(発表者), 谷山 公規,  $Y$ -exchanges and the Conway-Gordon theorems, The Seventh East Asian School of Knots and Related Topics, 西条 HAKUWA ホテル (東広島), 2011 年 1 月 11 日

新國 亮, 佐藤 友美(発表者), On Alexander ideals for Suzuki's spatial  $n$ -curves, The Seventh East Asian School of Knots and Related Topics, 西条 HAKUWA ホテル (東広島), 2011 年 1 月 10 日

花木 良(発表者), 新國 亮, 谷山 公規, 山崎 晶子, 結び目または完全 3 成分絡み目内在グラフについて, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会, 名古屋大学 (名古屋), 2010 年 9 月 22 日

新國 亮(発表者), On the Conway-Gordon theorems, International Workshop on Spatial Graphs 2010, 早稲田大学 (東京), 2010 年 8 月 20 日

新國 亮(発表者), Some remarks on knots and links in rectilinear spatial complete graphs on eight vertices, 研究集会「結び目理論」, 東京女子大学 (東京), 2010 年 3 月 20 日

花木 良(発表者), 新國 亮, 谷山 公規, 山崎 晶子, On intrinsically knotted or completely 3-linked graphs, 研究集会「結び目の数学 II」, 早稲田大学 (東京), 2009 年 12 月 25 日

花木 良(発表者), 新國 亮, 谷山 公規, 山崎 晶子, On intrinsically knotted or completely 3-linked graphs, 第 21 回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学みなとみらいキャンパス (横浜), 2009 年 11 月 26 日

新國 亮(発表者), 安原 晃, 空間 4 頂点完全グラフの  $C_5$  分類について, 研究集会「Intelligence of Low Dimensional Topology」- 村杉 邦男先生のご傘寿を祝して -, 大阪市立大学 (大阪), 2009 年 11 月 13 日

〔その他〕

ウェブサイト URL  
<http://www.lab.twcu.ac.jp/nick/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

新國 亮 (NIKKUNI RYO)  
東京女子大学・現代教養学部・准教授  
研究者番号: 00401878

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし