様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 5 月 23 日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2009～2010
課題番号：21740047
研究課題名（和文）　一般的基本多角形による双曲曲面の視覚化と、標準的分割理論への応用

研究課題名（英文）　Visualization of hyperbolic surfaces via generic fundamental polygons, and its applications on the theory of the canonical decomposition

研究代表者
牛島 顕（USHIJIMA AKIRA）
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号：50323803

研究成果の概要（和文）：コンピュータによる視覚化を進める為には、曲面を本研究ではどの様に記号的に処理をするかという方法を確立する事が求められる。その為の研究の過程で、双曲的とは限らず曲面一般を取り扱う事が可能であり、曲面の双曲性を適切に反映する記号処理の方法の原型を得た。また、一般のフックス群の場合の基本領域の組み合わせ的構造の安定性に関し、基本領域の中心に当たる点が無限遠点の場合にも、中心が双曲平面内の場合の既知の結果と類似の性質の成り立つ事が分かった。

研究成果の概要（英文）：To visualize hyperbolic surfaces by using of computer, it is required to decide suitable symbolical treatment of such surfaces in this research. I obtained a prototype of such symbolical realization of, not only hyperbolic but also general, surfaces. An advantage of this realization is to detect hyperbolicity of surfaces. Another result is this research is that I obtained a proof of stability of the combinatorial type of generic fundamental polygons of Fuchsian groups when their centers are on the circle at infinity of the hyperbolic plane. This result corresponds to a known result of the same property of generic fundamental polygons with their centers in the hyperbolic plane.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：双曲幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：双曲幾何学、離散群、フックス群、基本領域

１．　研究開始当初の背景

幾何学者が研究対象とするものは多様体と呼ばれるが、肯定的な証明が今世紀に入り得られた Thurston の幾何化予想によれば、三次元多様体では双曲多様体が最も豊富に存在する事が知られていた。しかしその予想が提唱される以前から、二次元多様体即ち曲面の場合に同様の事実が成り立つ事は周知の事実であった。

粗く述べるなら、双曲構造とは、多様体が平行線の公理が成り立たない双曲空間の一部分を貼り合わせて出来上がっている状態を意味する。双曲空間は数学のみならず物理学においても重要であり、例えば特殊相対性理論で用いられる空間として知られている。

三次元多様体に対しては、もしそれが双曲構造を許容するなら、その様な構造は本質的に一つしかあり無い事が知られている。一方、双曲曲面の場合には、許容する双曲構造が無数にあり得る事が知られており、それら全体はタイヒミュラー空間と呼ばれ、今現在も活発に研究されている。

双曲曲面を調べる為の様々な方法の内、本研究では曲面を多角形に切り開き、辺同士の貼り合わせ方及び多角形の形に、研究対象の情報を分けて調べる方法を採用する。これは、双曲平面の等長変換群の離散部分群、即ちフックス群を調べる事と同じであるが、その為には双曲構造にとって都合の良い切り開き方を用いる方が望ましい。

その標準的なものがディリクレ基本多角形（以下単に「基本多角形」と言及）と呼ばれる、本研究の対象となるものである。

基本多角形とは、双曲曲面の中に「中心」となる点を任意に一つ定め、与えられた双曲構造に対応するフックス群の作用によるその点の軌道を作り、その等距離集合により曲面を切り開いたもので、この集合はボロノイ図としても知られている。そしてそれが一般的であるとは、局所的に最も「簡単」な状態になっている事を意味する。

一般的基本多面体の概念は T. Jorgensen と A. Marden により定義された（なお二次元の場合、同じ概念はこの論文より前に A. Beardon により既に導入されていた）。その論文では「主結果」として、三次元双曲多様体に関しては基本多角形が一般的になる様な中心の集合が稠密に存在する事を示している。

この結果は、クライン群の代数的収束と幾何的収束に差異がある事を具体的に初めて証明した、同じ著者によるその後の研究における重要な道具となっている。

２．研究の目的

上で触れた T. Jorgensen と A. Marden による「主結果」の証明には、不備のある事が知られている。本研究の将来的な目的の一つは、この不備を埋める事にあった。その為に、双曲曲面を研究する際の重要な対象である基本多角形について、その中心の位置や曲面の双曲構造の変化に応じて、多角形がどの様に変形するかを捉える為の理論作りと、コンピュータを用いてその変形を視覚化する事を目指した。

この研究は、閉双曲多様体に対する新たな分割で、その双曲性をより良く反映するものを構成する為の将来の研究に繋がるものである。

具体的には、双曲曲面（即ちフックス群）が与えられたときに、中心に応じてどの様な基本多角形が生じるのかを具体的に調べたり、それを用いて閉双曲多様体の新たな分割理論の構築を目指す事を予定している。

一般的な基本多面体に対応する中心の稠密性は、クライン群論における主要な問題の一つであった二つの収束の差異を決定する論文において重要な役割を果たしているにも関わらず、その証明に不備があるのは問題であると言える。

更に、双曲多様体の胞体分割については、境界や穿孔のあるものに対する標準的な胞体分割の方法は 1980 年代末に提唱されたが、それらが存在しない閉双曲多様体については、申請者の知る限り満足のいく分割の方法は未だ提唱されていない。

そして、量子不変量をはじめとして、低次元位相幾何学では様々な不変量が近年構築されてきている。これらの不変量を具体的に計算する際には、多様体を四面体に分割する事により成される事が多い。その際に性質の良い分割方法が与えれば、それを用いる事により、容易に計算が出来、研究対象をより深く考察出来ると期待される。またタイヒミュラー空間論においても、三角形分割に基づく研究は益々盛んである。その為にも、閉双曲多様体の標準的な胞体分割を探る研究は重要であり、その候補の一つとして知られている、一般的な基本多面体を用いる方法を考察する重要性は高い。

３．研究の方法

本研究に先立つ、申請者が研究代表者を務める若手研究(B)「双曲空間の等長写像から成る離散群の一般的基本多面体の存在証明と、その視覚化」により、双曲曲面に関しては一般的な基本多角形に対応する点が稠密に存在する事の、T. Jorgensen と A. Marden の方針に従った別証明が得られた。この事実そのものは A. Beardon が既に証明した事ではあるが、この別証明の利点は、中心が双曲空間の無限遠に位置する場合にも同じ証明方針が適用出来る点にあった。

同様の問題を三次元の場合に考えると、現時点では、特定の場合には同等の結果の別証明を与える事が出来るであろうという目処が立ってきたところであるが、その他の場合の証明を与える為には、いくつかの点で二次元の場合とは異なる困難が残っている事が分かってきた。

そこで、一般的な基本多面体の振る舞いをより詳しく調べる必要性が生じている。それには、フックス群が与えられたときに、それから得られる双曲曲面内の点に対応する基本多角形の形を、コンピュータを用いて視覚化する事が有効である。それにより、中心を動かした際の基本多角形の形の変化の詳細を知る事が出来、それに基づき三次元の場合に起こり得る現象を探る事が可能になると期待される。

位相形が同じ基本多角形を与える中心を一つの集合と捉えると、閉双曲曲面の胞体分割が得られる事が予想されている。この視覚化により、その予想が妥当であるかも検証する事も期待された。

その現象を確かめるまでには本研究は至らなかったが、基本多角形の位相形に注目するという視点は、曲面をどの様に記号処理的に扱うかという問題に対する指針を与え、下記に述べる曲面の取り扱いに関する研究成果に繋がった。

４．研究成果

コンピュータによる視覚化を進める為には、曲面を本研究ではどの様に記号的に処理をするかという方法を確立する事が求められる。この方針に沿って研究を進め、その過程で、双曲的とは限らず曲面一般を取り扱う事が可能であり、曲面の双曲性を適切に反映する記号処理の方法の原型を得た。これが、本研究の第一の研究成果である。

この成果は、Studio Phones の桐生裕介氏との共同研究である。曲面の位相型に対する圏論的な取り扱いの端緒を得た本研究成果は、桐生氏との今後の共同研究により、例えば写像類群や写像トーラスの幾何構造といった、曲面上の他の幾何学的性質の研究への応用方法が得られるのではないかと期待されている。なお、この研究成果は、桐生氏による研究発表においても、随時触れられている。

一般のフックス群の場合の基本領域の組み合わせ的構造の安定性に関し、基本領域の中心に当たる点が無限遠点の場合にも、中心が双曲平面内の場合の既知の結果と類似の性質の成り立つ事が分かった。指定された点と、離散群によるその点の像との距離により定まるという基本領域の性質から、「無限遠点を中心とする基本領域」はそのままの定義では導入する事は出来ない。

そこで、二点間の等距離線の極限を導入し、これを経由して無限遠点を中心とする基本領域を定義する。この定義はこれまでの既存の研究でも用いられたものである。しかし、基本領域の組み合わせ的構造の、中心の位置に関する安定性という性質を導くには、中心が双曲平面内にある場合と無限遠点である場合とは根本的に異なる証明が必要となる。

本研究ではこの困難を、計算機を援用する事により証明の方針を確立し、具体的な証明を完成させる事が出来た。そして本結果は、論文として発表する事が出来た。

以上が、本研究の成果である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

1. Ushijima, A., Generic fundamental polygons for Fuchsian groups, Pacific Journal of Mathematics, 査読有, 2011, in press.

〔学会発表〕（計２件）

1. 牛島 顕, Symbolic construction of developments of surfaces, Symbolic description and low-dimensional topology, 2009年10月30日, 広島大学（広島県）
2. 牛島 顕, McShane’s identities and the volume of $M_{1,1}$, Workshop on Weil-Petersson volumes, 2009年12月21日, 東京工業大学（東京都）

６．研究組織

(1)研究代表者

牛島 顕（USHIJIMA AKIRA）
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号：50323803

(2)研究分担者

該当なし

(3)連携研究者

該当なし