

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 3 月 31 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21740050

研究課題名（和文）自由群の自己同型群の研究

研究課題名（英文）A research of the automorphism group of a free group

研究代表者

佐藤 隆夫 ( SATOH TAKAO )

東京理科大学・理学部第二部数学科・講師

研究者番号：70533256

研究成果の概要（和文）：主な研究成果について列挙する。①自由群の IA-自己同型群の降中心列に付随する Johnson 準同型の余核の決定，②自由群の自己同型群の Johnson 余核，及び自由リー代数の微分代数の GL-既約分解の組み合わせ論的記述，③写像類群の Johnson 準同型の全射性に関する新しい障害の構成，④IA-自己同型群のアーベル化を係数とする，自由群の自己同型群の 1 次元コホモロジーの計算。

研究成果の概要（英文）：Our main results of this research are as follows: ①We determined the cokernel of the Johnson homomorphism associated to the lower central series of the IA-automorphism group of a free group. ②We gave combinatorial descriptions of the GL-decomposition of the Johnson cokernels and the derivation algebra of the free Lie algebra. ③We constructed new series of obstructions for the surjectivity of the Johnson homomorphism of the mapping class group of a surface. ④We computed the first cohomology group of the automorphism group of a free group with coefficients in the abelianization of the IA-automorphism group.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：自由群の自己同型群，Johnson 準同型，曲面の写像類群

## 1. 研究開始当初の背景

自由群の自己同型群は，屢々，曲面の写像類群と比較研究の対象とされ，代数的にも位相幾何学的にも活発な研究がなされている。一方で，自由群の自己同型群のねじれ係数 (コ)ホモロジーや Johnson 準同型については，研究の枠組み自体は写像類群の類似物として比較的容易に定まるが，具体的な研究結果については，写像類群のそれらと比べると

決して深いものとは言い難かった。写像類群に対する結果との比較研究をスムーズに行うためにも，自由群の自己同型群に直接焦点を当てて専門的に研究を深める必要があった。

## 2. 研究の目的

この研究の究極的な目標は，IA-自己同型群と呼ばれる，自由群の自己同型群のある正

規部分群の整係数ホモロジー群の構造を説明することである。そのために、これまでに写像類群の研究で培われてきた技術を応用することで、自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジー、及び Johnson 準同型の性質についての研究を行った。

### 3. 研究の方法

具体的な研究の方法は、自由群の自己同型群のねじれ係数 (コ) ホモロジー群については、種々の GL 表現空間を係数とした場合の (コ) ホモロジーの構造を、組み合わせ群論や Outer space の幾何などを用いて計算を試みた。

また、Johnson 準同型については、組み合わせ群論や GL 表現論を用いてその余核の構造を詳しく考察した。

### 4. 研究成果

主な研究成果をいくつか挙げる。まず、ねじれ係数コホモロジーについては、自由群の自己同型群の Nielsen 表示を用いた組み合わせ群論的手法により、IA-自己同型群のアーベル化を係数とした場合の 1 次元コホモロジー群を決定した。特に、これは階数 2 の自由アーベル群であり、その生成元についても具体的な記述を与えた。これに関連して、第 1-Johnson 準同型が自由群の自己同型群上に準同型写像として拡張しないという副次的な結果も得られた。

一方、Johnson 準同型の余核に関する研究では、自由群の IA-自己同型群の降中心列の各次数商上で定まる Johnson 準同型の余核を決定した。さらに、これの GL 加群としての既約分解に関する組み合わせ論的な記述を、榎本直也氏 (京大理) から専門的知識の提供を受けながら与えることができた。特に、自由群の自己同型群の Johnson 準同型の余核に現れる対称テンソル (森田障害) や、交代テンソルの重複度が 1 であることを示した。

また、上述の結果を曲面の写像類群の Johnson 準同型の余核の研究に応用し、森田障害が重複度 1 で Johnson 余核に現れることの別証明や、次数  $k$  が 5 以上で  $\text{mod } 4$  で 1 に等しいときに、 $\text{Sp}$  既約表現  $[1^k]$  が写像類群の Johnson 余核に重複度 1 で現れることを示した。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件) 全て査読有

- ① Takao Satoh; On the image of the Burau representation of the IA-automorphism group of a free group, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 214 (2010), 584-595.
- ② Takao Satoh; A reduction of the target of the Johnson homomorphisms of the automorphism group of a free group, *Transactions of American Mathematical Society*, 363 (2011), 1631-1664.
- ③ Takao Satoh; On the fourth Johnson homomorphism of the automorphism group of a free group, *Journal of Algebra*, 323 (2010), 3182-3201.
- ④ Takao Satoh; The Johnson filtration of the McCool stabilizer subgroup of the automorphism group of a free group, *Proc. of Amer. Math. Soc.* 139 (2011), 1237-1245
- ⑤ Takao Satoh; On the Johnson filtration of the basis-conjugating automorphism group of a free group, *Michigan Mathematical Journal*, 61 (2012), 87-105.
- ⑥ Takao Satoh; On the lower central quotients of the free groups of finite rank of a certain variety, *Journal of Algebra* 331 (2011), 449-465.
- ⑦ Takao Satoh; The kernel of the Magnus representation of the automorphism group of a free group is not finitely generated, *Mathematical Proceedings Cambridge Philosophical Society*, 151 (2011), 407-419.
- ⑧ Takao Satoh; On the lower central series of the IA-automorphism group of a free group, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 216 (2012), 709-717.
- ⑨ Naoya Enomoto and Takao Satoh; On the derivation algebra of the free Lie algebra and trace maps, *Algebraic and Geometric Topology*, 11 (2011), 2861-2901.

[学会発表] (計 24 件)

#### 海外講演

- 1 On the Johnson homomorphisms of the automorphism group of a free group, *Geometry and Analysis*, Paris 7, 21 December 2009.

2 On On the Johnson homomorphisms of the automorphism group of a free group, Teichmuller Theory, Oberwolfach, 4 December 2010.

国内講演

- ① 自由群の自己同型群の Johnson 準同型について, 京都大学大学院理学研究科数学教室談話会, 2009年5月27日.
- ② 自由群の自己同型群の Johnson 準同型について, 研究集会「群と力学系に関わる離散幾何学」, 愛媛大学理学部数学科, 2009年9月2日.
- ③ 自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジー群について, 日本数学会秋の年会, 大阪大学豊中キャンパス, 2009年9月26日.
- ④ On the Johnson filtration of the automorphism group of a free group, 研究集会「微分・代数トポロジーの現在と未来」, かんぽの宿 徳島, 2009年11月11日.
- ⑤ On the kernel of the Magnus representation of the automorphism group of a free group, 研究集会「第36回変換群論シンポジウム」, 大阪市立大学学術情報総合センター, 2009年12月10日.
- ⑥ 自由群の自己同型群の Magnus 表現の核について, 日本数学会春の年会, 慶應義塾大学矢上キャンパス, 2010年3月24日.
- ⑦ On the Johnson filtration of the automorphism group of a free group, RIMS 研究集会「変換群と手術理論」, 京大数理解, 2010年9月1日.
- ⑧ On the kernel of the Magnus representation of the automorphism group of a free group, 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」, 東大数理, 2010年9月6日.
- ⑨ 自由群の自己同型群の Johnson filtration について, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月22日.
- ⑩ 自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジーについて I, 信州大学理学部数理・自然情報科学教室 トポロジーセミナー, 2011年1月11日.
- ⑪ 自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジーについて II, 信州大学理学部数理・自然情報科学教室 談話会, 2011年1月12日.
- ⑫ 自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジーについて, 北田先生を囲む研究集会, 京都市大学のまち交流センター, 2011年2月12日.

- ⑬ On the cokernel of the Johnson homomorphism of the mapping class group of a surface, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics, 首都大学東京, 2011年3月8日.
- ⑭ 曲面の写像類群の Johnson 準同型の余核について, 特異点セミナー, 東京理科大学理学部数学科, 2011年5月21日.
- ⑮ 曲面の写像類群の Johnson 準同型の余核について, RIMS 研究集会「変換群の幾何と組合せ論」, 京都大学数理解析研究所, 2011年6月16日.
- ⑯ 曲面の写像類群の Johnson 準同型の余核について, RIMS 研究集会「群の表現及び表現空間の幾何学的・解析的研究」, 京都大学数理解析研究所, 2011年6月23日.
- ⑰ 自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジー群について, RIMS 研究集会「有限群のコホモロジー論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所, 2011年9月1日.
- ⑱ 自由リー代数の微分代数と Trace 写像について, 北海道大学理学部数学科, 幾何学コロキウム, 2011年9月12日.
- ⑲ 曲面の写像類群の Johnson 余核について, 城崎ホモトピー論研究会, 城崎町健康福祉センター, 2011年11月4日.
- ⑳ On the derivation algebra of the free Lie algebra, and trace maps, 兵庫県民会館, 第38回変換群論シンポジウム, 2011年11月20日.
- 21 On the Johnson cokernels of the mapping class group of a surface, 東京大学大学院数理科学研究科, トポロジー火曜セミナー, 2012年1月17日.
- 22 On the augmentation quotients of the IA-automorphism group of a free group, 東京工業大学トポロジーセミナー, 2012年1月25日.

〔図書〕(計 0 件)

なし

〔産業財産権〕

○出願状況(計 0 件)

なし

○取得状況(計 0 件)

なし

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐藤 隆夫 (SATOH TAKAO)

東京理科大学・理学部第二部数学科・講師

研究者番号：70533256