様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年５月３１日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2009～2011
課題番号：２１７４００５４
研究課題名（和文）　曲面上の主分布およびある種の優決定系の考察
研究課題名（英文）　Researches of principal distributions and over-determined systems on surfaces
研究代表者
安藤　直也（ANDO NAOYA）
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：５０３５９９６５

研究成果の概要（和文）：E^3 内の極小曲面を曲面上に現れる優決定系（過剰決定系）の観点で特徴づけた．曲面上の優決定系の二つの一般化を考案し，曲面上の優決定系に起こり得る現象をより一般的な観点から捉えることができた．非等方的平均曲率一定曲面に関する Koiso-Palmer による結果の別証明を与えた．曲面上の主分布はある関数の第一基本形式に関する Hessian の固有方向場として局所的に表されることを示した。

研究成果の概要（英文）：I characterized minimal surfaces in E^3 in terms of over-determined systems on surfaces. I devised two generalizations of an over-determined system on a surface and obtained several results which are considered as generalizations of results I already had with respect to over-determined systems on surfaces. I presented another proof of a result by Koiso-Palmer with respect to surfaces with constant anisotropic mean curvature. I locally represented principal distributions on a surface as fields obtained from eigendirections of the Hessian of some function with respect to the first fundamental form of the surface.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：微分幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：曲面，主分布，優決定系（過剰決定系），準曲面

１．研究開始当初の背景

曲面の第一基本形式と第二基本形式は Gauss の方程式と Codazzi-Mainardi の方程式によって関係づけられていて，これらの方程式による第一基本形式と第二基本形式の関係が曲面を決定する（曲面論の基本定理）．筆者は数年前，E^3 内の臍点を持たず Gauss 曲率が零ではない曲面 S の二つの主曲率の対は Codazzi-Mainardi 多項式 P_{CM} の零点でありそして P_{CM} は S の準曲面構造，つまり第一

基本形式 g および二つの主分布 D_1，D_2 の組（g, D_1，D_2）によって決まることを示した．これらから，まず主曲率の対は（g, D_1，D_2）によってほとんど決まることがわかる．さらに筆者は，空間内の曲面 S の存在を認識する方法として，次のものに着目した：まず曲率 K が零ではない準曲面（M, g, D_1，D_2）が与えられたとし，これに対し D_1，D_2 が主分布となるような等長はめこみが存在した結果，空間内に曲面が存在する．こうした考え方を出発点として，筆者はまず主方向平行曲面，そしてより一般に曲率線の族の一つが測地線からなる曲面の準曲面構造を特徴づけた．また曲面は準曲面上で g と（D_1，D_2）の間に何らかの（良い)関係が成り立ったために空間内に存在しているという考え方に立脚して，曲面の曲率線の測地的曲率を調べ，特に 3 次元空間型内の平均曲率一定曲面や定曲率曲面（但しこの定曲率は空間型の一定断面曲率とは異なる)を曲率線の測地的曲率の観点で特徴づけた．

本研究課題に取り組むことになったきっかけは，E^3 内の曲面上に現れる優決定系(過剰決定系)$F_u = \alpha + \beta e^F$, $F_v = \gamma + \delta e^{-F}$ の考察が有益であると認識したことである．Molding surface は曲面上に現れる優決定系の整合条件 (compatibility condition)によって特徴づけられ，曲面上の優決定系が整合条件を満たすことと曲面の（準曲面構造が定める)Codazzi-Mainardi 多項式 P_{CM} が恒等的に零であることは同値である．さらに molding surface の曲率線の族の一つは測地線からなり，このことは既に知られていた(Cartan, Bryant-Chern-Griffiths)が，筆者は曲面上の優決定系を考察することで別証明を与えた．Molding surface は，この性質を持つため，主方向平行曲面とほとんど同じものであると言える．上述の系が整合条件を満たさないとき，解の個数は高々 2 であるが，筆者は解がちょうど二つ存在するための必要十分条件を与えた．この条件に sinh-Gordon 方程式が現れる．そして isothermic な曲面上の優決定系がちょうど二つの解を持つことと，曲面が零ではない一定平均曲率を持ちかつ回転面に含まれないことは同値であることがわかった．

２．研究の目的

前節で説明された結果を踏まえて，曲面上に現れる優決定系の諸性質をさらに理解するための方法・枠組を構築する．

３．研究の方法

曲面上に現れる優決定系を少し変形したものは，曲面上に現れるある 1 形式および主分布によって与えられることに着目する．また曲面上に現れる優決定系の一般化を考察する．

４．研究成果

S は E^3 内の曲面で，臍点を持たないとする．このとき S の第一基本形式 g は，S の各点の近傍上で主分布と相性がよい局所座標（u, v）を用いて $g = A^2du^2 + B^2dv^2$ と表される．S の Gauss 曲率 K は零にはならないとする．k_1, k_2 は S の主曲率で，$\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$ が与える主方向に各々が対応するとする．このとき $k_1k_2 = K \neq 0$ を用いて，$F := \log(k_1{}^2A^2)$ は優決定系 $F_u = \alpha + \beta e^F$, $F_v = \delta e^{-F}$ の解であることがわかる，但し $\alpha := (\log(I_u + J_v)^2)_u$, $\beta := 2I/(I_u + J_v)$, $\delta := -2(I_u + J_v)J$ および $I := B_u/A$, $J := A_v/B$ である．

V_K を S 上の標準的前発散とする：V_K は S 上のベクトル場で，S の各点を通る二つの曲率線の測地的曲率ベクトルの和で与えられる．V_K は S の準曲面構造によって定まる．

θ_K は S 上の 1 形式で，$\theta_K(\cdot)=g(V_K,\ \cdot)$ によって与えられるとする．S が向きづけ可能であるとすると，適切に向きを定めかつ $(u,\ v)$ が正の向きを与えるようにとるとき，$\omega:=-*\theta_K$ は $\omega=-Jdu+Idv$ と表される，但し $*$ は向きづけられた Riemann 多様体である S の $*$-作用素である．$K\neq0$ から，$d\omega\neq0$ がわかる．

以上においては，曲面 S 上に優決定系 $F_u=\alpha+\beta e^F$, $F_v=\delta e^{-F}$ および 1 形式 ω を見出した．逆に，2 次元多様体 M 上に，二つの 1 次元分布 D_1，D_2 で M のどの点でも $D_1\neq D_2$ を満たすものおよび外微分が消えない 1 形式 ω が与えられたとする．$(u,\ v)$ を $(D_1,\ D_2)$ と相性がよい M の 1 点の近傍 U 上の局所座標とし，ω を $\omega=-Jdu+Idv$ と表す．U 上の関数 α，β，δ を $\alpha:=(\log(I_u+J_v)^2)_u$，$\beta:=2I/(I_u+J_v)$，$\delta:=-2(I_u+J_v)J$ で定めるとき，優決定系 $F_u=\alpha+\beta e^F$, $F_v=\delta e^{-F}$ が解を持つかどうか，整合条件を満たすかどうか，整合条件を満たさない場合の解の個数は $(u,\ v)$ の取り方には依らず，ω，D_1，D_2 によって決まる．この優決定系が解 F を持つならば，$I:=B_u/A$, $J:=A_v/B$ を満たす U 上の正値関数の組 $(A,\ B)$ に対し U の E^3 へのあるはめこみが次を満たす：誘導計量は $g=A^2du^2+B^2dv^2$ で与えられる；D_1，D_2 は主分布を与える；$k_1:=e^{F/2}/A$, $k_2:=K/k_1$ はそれぞれ D_1，D_2 に対応する主曲率である，但し K は g に関する曲率である．組 $(A,\ B)$ の選び方はたくさんあるので，上のような二つの 1 次元分布 D_1，D_2 および 1 形式 ω の組に対し E^3 内の曲面の族が対応する．これが２００９年度に得られた結果の一つである．上の優決定系が解を持つための必要十分条件を，以前の議論を参考にして得ることができる．また molding surface に関する議論を参考にして，上の優決定系が整合条件を満たすならば $IJ\equiv0$ が成り立つことを示すことができる．また上の優決定系がちょうど二つの解を持つための必要十分条件も以前と同様に得ることができ，従ってこの条件に sinh-Gordon 方程式が現れる．

F が上の系の解であるとするとき，$F_{uv}=F_{vu}$ を用いて $Xe^{2F}+Ye^F+Z=0$ がわかる，但し $X:=\beta_v$，$Y:=\alpha_v+2\beta\delta$，$Z:=-\delta_u+\alpha\delta$ である．上の系の整合条件は $X\equiv0$, $Y\equiv0$, $Z\equiv0$ によって与えられる．Y^2-4XZ が正，零または負であるかどうかは局所座標 $(u,\ v)$ の取り方には依らない．２００９年度においては，上の系が唯一つの解を持ちかつ $Y^2-4XZ\equiv0$ を満たすための必要十分条件を求めた．この条件に現れる方程式は臍点を持たない極小曲面を特徴づけるものであり，従って isothermic な曲面上の優決定系がこの条件を満たすことと曲面が極小でありかつ回転面に含まれないことは同値であることがわかる．

２０１１年度において，2 次元多様体 M 上に二つの 1 次元分布 D_1, D_2 で M のどの点でも $D_1\neq D_2$ を満たすものおよび 1 形式 ω に加えて M のどの点でも消えない 2 形式 Ω が与えられたとし，以上における $d\omega$ を一般の Ω に置き換えて同様の議論を行なった．$\Omega=\rho\,du\wedge dv$ と表すとき，$F_u=(\log\rho^2)_u+(2I/\rho)e^F$, $F_v=-2J\rho e^{-F}$ という型の優決定系は曲面上に現れる優決定系の一般化の一種である．この型の優決定系が解を持つための必要十分条件，整合条件を満たすための必要十分条件，ちょうど二つの解を持つための必要十分条件および前段落と同様の設定の下で唯一つの解を持ちかつ $Y^2-4XZ\equiv0$ を満たすための必要十分条件を得たが，いずれも曲面上の優決定系に関して今までに得られている結果の証明を参考にして得られた．上の系が整合条件を満たすとして

も，$IJ\equiv 0$ が成り立つとは限らない．

M を m 次元多様体とし（$m\geqq 2$），θ_0，θ_1，…，θ_n を M 上の 1 形式とする（$n\in\mathbb{N}$）．このとき「多項式型の優決定系」$df=\Sigma_{0\leqq i\leqq n}f^i\theta_i$ は曲面上に現れる優決定系の一般化の一種である．２０１１年度において，多項式型の優決定系について考察した．多項式型の優決定系が M の各点で異なる値をとる p 個（$1\leqq p\leqq n+1$）の解を持つとき，これらが解であることがわかるような系の表現方法を開発した．特に，$p=n+1$ の場合には，各 θ_i は $n+1$ 個の解によって表される．多項式型の優決定系の整合条件は，θ_0，θ_1，…，θ_n およびこれらの外微分を組み合わせて得られる幾つかの 2 形式が M 上で零であると表現される．$n=2$ で系の 2 個の解が与えられている場合に系の整合条件を記述したが，これは曲面上に現れる優決定系で少なくとも 2 個の解を持つものの整合条件の一般化である．またこの記述から，系がもう一つの解を持つならば系は整合条件を満たすことがわかる．また n が 3 以上で系が $n+1$ 個の解を持つ場合の整合条件を $n+1$ 個の解で記述した．

本研究課題の研究期間中に上述の結果以外に得られた主分布に関する結果を以下に記す．

２００９年度には，コンパクト，向きづけ可能で種数が 0 である非等方的平均曲率一定曲面がその Wulff 図形と相似であるという Koiso-Palmer の結果の別証明を与えた．いずれの証明の方針も普通の平均曲率一定曲面に関する Hopf の定理の証明のものと同じである．曲面が非等方的に全臍的であるならば，曲面は Wulff 図形と相似である．曲面が非等方的に全臍的ではないならば，非等方的臍点は孤立していてかつその非等方的主分布（非等方的型作用素の固有方向場）に関する指数は負であることを証明できるので，Hopf-Poincaré の定理から矛盾を得る．Koiso-Palmer による証明と筆者によるものの違いは，曲面が非等方的に全臍的ではない場合に非等方的臍点の近傍を調べるための設定に現れている．曲面の普通の平均曲率は面積汎関数の第一変分に現れるが，非等方的平均曲率も面積汎関数の一般化の第一変分に現れ，Koiso-Palmer はその汎関数に関する情報に立脚して議論している．一方で，筆者は Reilly の１９７６年の論文における設定に立脚して，非等方的平均曲率一定曲面における非等方的臍点の近傍を 2 変数関数のグラフとして表して議論した．この設定で非等方的平均曲率一定曲面の方程式を記述し，それが 2 階の楕円型方程式であることがわかるので，Hartman-Wintner の定理を用いて結論を導いた．

E^3 内の曲面 S の各点のある近傍 U から Euclid 平面 E^2 のある開集合 O の上への微分同相写像Φおよび O 上の滑らかな関数 f が存在して，次が成り立つことが知られている：Φによって U の主方向はちょうど O の平坦計量に関する f の Hessian の固有方向に写される．２０１０年度には，曲面上の主分布は臍点ではない点の近傍上である関数 f の第一基本形式に関する Hessian の固有方向場として表されることを示した．これを示すために，まず f が満たすべき条件を f と曲面の Hopf 微分の関係式として表した．さらに f が満たすべき 2 階の双曲型方程式を導き，その解の存在によって結論を導いた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① Naoya Ando, Hartman-Wintner’s theorem and its applications, Calculus of Variations and Partial Differential

Equations, 査読有, 43 (2012) 389-402.

〔学会発表〕(計８件)
① 安藤直也, A family of surfaces in E^3 given by an over-determined system, 曲面論小研究集会, 2012. 3.19, 東京工業大学 (東京, 大岡山キャンパス)
② 安藤直也, A family of surfaces in E^3 given by an over-determined system, 研究集会「測地線及び関連する諸問題」, 2012. 1. 8, 熊本大学 (熊本, 教育学部)
③ Naoya Ando, Hopf's theorem for surfaces with constant mean curvature and its generalizations, 第10回環太平洋幾何学会議 2011 大阪-福岡PartII, 2011.12. 9, 九州大学西新プラザ (福岡, 西新)
④ 安藤直也, 曲面上の主分布の振る舞い, 日本数学会 2010 年度年会幾何学分科会特別講演, 2010. 3.24, 慶應義塾大学 (神奈川, 矢上キャンパス)
⑤ 安藤直也, Hartman-Wintner の定理およびその応用, 日本数学会 2010 年度年会幾何学分科会一般講演, 2010. 3.24, 慶應義塾大学 (神奈川, 矢上キャンパス)
⑥ 安藤直也, 曲面上の主分布およびある種の優決定系について, 研究集会「部分多様体論・湯沢２００９」, 2009.11.27, 湯沢グランドホテル (新潟, 越後湯沢)
⑦ 安藤直也, 曲面上の主分布およびある種の優決定系について, 日本数学会 2009 年度秋季幾何学分科会一般講演, 2009. 9.24, 大阪大学 (大阪, 豊中キャンパス)
⑧ 安藤直也, 曲面上の主分布およびある種の優決定系について, 九州大学幾何学セミナー, 2009. 6.26, 九州大学 (福岡, 箱崎キャンパス)

〔その他〕
ホームページ等
http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~ando/index-j.html

６．研究組織
(1)研究代表者
安藤　直也 (ANDO　NAOYA)
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：50359965