

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 2 月 28 日現在

機関番号：14602

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21740055

研究課題名（和文）3次元多様体上の葉層構造

研究課題名（英文）Foliations on three dimensional manifolds

研究代表者 村井 紘子（MURAI HIROKO）
奈良女子大学・理学部・助教

研究者番号：40456843

研究成果の概要（和文）：

3次元多様体内の本質的 lamination と、strongly irreducible な Heegaard 分解を与える Heegaard 曲面の交わりを調べた。本質的 lamination を本質的曲面に置き換えた場合、単純閉曲線で交わるようにできることが知られているが、特に Heegaard 曲面の種数が 2 のとき、これと類似の結果を得た。また non-compact な対象ならでは興味深い現象が起こることを確認した。

研究成果の概要（英文）：

We studied intersections of essential laminations and Heegaard surfaces which give strongly irreducible Heegaard splittings in three dimensional manifolds. It is known that such Heegaard surfaces intersect essential surfaces in essential simple closed curves. We gave a similar result when Heegaard genus is two. We also gave some examples which give a phenomenon specific to non-compact objects.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	500,000	150,000	650,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：トポロジー

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：3次元多様体、Heegaard 分解、Heegaard 曲面、本質的 lamination、結び目、葉層構造

1. 研究開始当初の背景

3次元球面内の任意の結び目補空間には、D. Gabai により、taut、有限深度で、コンパクトな葉を 1 枚だけでもつような C^0 級の葉層構造が存在することが知られている。Gabai は

sutured manifold 理論を用いて実際に葉層構造を構成するアルゴリズムを与えている。これを受け、Cantwell-Conlon は結び目の深度と呼ばれる概念を導入し、研究を行ってきた。結び目の深度とは 3次元球面内の結び目の補空間に入る、ある種の葉層構造の深度の最小値を表すものである。

Cantwell-Conlon の議論においては、コンパクトな葉が1枚であるという条件が仮定されているが、研究代表者はこれに関し、コンパクトな葉の枚数と深度の最小値との間に本質的な関係があることを明らかにし、両者の差をいくらでも大きくできる多様体の例を構成していた。ここで、結び目補空間だけでなく、結び目に沿ってデーン手術して得られる多様体やその巡回被覆空間に対し、そこに構成できる、ある種の条件を満たす葉層構造の深度の最小値を多様体の不変量として考えることができる。有限深度の葉層構造が与えられたとき、局所的な変形により非本質的な複雑さを増やすことで深度の大きな葉層構造を得ることができるので、この不変量はある種の多様体の複雑さを表しているといえる。研究代表者は、葉層構造の満たすべき条件を変えたときにこの不変量がどう変わるのかについても調べていた。隣接する葉の深度の間の関係を記述する gap という値を定義し、これを用いた深度の評価を得た。

このように、葉層構造の深度と多様体の性質の関係を記述するための道具立てができていたが、まだその解明には至らず、解決すべき課題も見つかった。葉層構造を調べる上で、具体的な葉のふるまいがとらえにくいと感じていたが、Gabai によって与えられた、sutured manifold 理論を用いて葉層構造を構成するアルゴリズムを計算機で実現することで具体例の作成に役立てることができ、具体的な葉のふるまいも観察することができそうだという感触を得ていた。

2006 年には A. Juhász により sutured Floer homology というある種の sutured manifold に関する不変量が定義され、これを用いて結び目の補空間に入る性質の良い葉層構造の深度と、良く知られた結び目不変量である、結び目の Alexander 多項式との関係が調べられていた。上に挙げたように、計算機で sutured manifold をとり扱うことができれば、この方面への研究の発展も期待された。

また Gabai-Oertel によって、本質的曲面と葉層構造の中間の性質をもつ、本質的 lamination が定義され、結び目理論、三次元多様体論に関するさまざまな結果が得られていたので、葉層構造との関係に注目し、この方面への研究の発展も目指していた。

2. 研究の目的

多様体を固定したときに、そこに入る葉層構造の深度の最小値を多様体の不変量として

考えるというのは新しい観点からの研究であり、取り組むべき問題が数多く残されている。本研究の主要な目的の一つはこの新たな領域の開拓を目指すことである。研究の過程では、多様体の双曲的体積や結び目の種数などといった幾何構造や古典的な不変量などと深度の関係、さらには本質的 lamination、接触構造、力学系等との関係が導かれることを期待している。

3. 研究の方法

(1) 3次元球面内の任意の結び目補空間に対しては、sutured manifold と呼ばれる、結び目由来の情報つき3次元多様体を用いて性質の良い、深度が有限の余次元1の葉層構造を具体的に構成することができる。しかし実際に構成するためには、sutured manifold decomposition に用いる曲面の族をうまく選ぶ必要があること、また葉層構造を構成する葉は一般にコンパクトでないことから、実際に葉層構造の様子を把握し、葉の形、葉のふるまいを調べるのは難しい。そこで本研究では、葉層構造の様子を具体的に観察するために計算機を用いて具体例を構成し、例の観察を通して理解を深めるとともに得られた実験的結果を数学的な結果として定式化することを目指した。

(2) 葉層構造の葉は一般にコンパクトでないため実際に葉層構造の様子を把握するのは難しく、葉の形、葉のふるまいに関しては知られていることはあまり多くない。一方、本質的曲面と葉層構造の中間の性質をもつ本質的 lamination という概念が Gabai-Oertel によって導入された。本質的 lamination は、それ自身はコンパクトではないが、コンパクトな対象である本質的 branched surface を用いて調べることが可能である。また、任意のコンパクトで向きづけ可能な3次元多様体は Heegaard 分解をもつことが知られている。Heegaard 分解とは多様体を、向き付けられた閉曲面 (Heegaard 曲面) のみで交わる2つの単純な多様体に分解するものであるが、Heegaard 曲面と本質的曲面の交わりの曲線をみることにより多様体の位相的性質を導くという研究が、Haken、Casson-Gordon、Shultens 等によりなされている。この本質的曲面を本質的 lamination に置き換えた場合について、本質的 branched surface を利用して調べた。深度有限の葉層構造の各葉は、深度

の定義により、その葉の深度より1低い深度の葉の近傍を取り除くとコンパクトとなるが、研究代表者はこのことを用いて葉層構造の葉のふるまいを調べているので、ここでもその手法を活かした。

4. 研究成果

(1) 本研究では、葉層構造の様子を具体的に観察するために計算機を用いて具体例を構成し視覚化することに取り組んだ(桐生裕介氏との共同研究)。三次元球面内の結び目補空間をザイフェルト曲面で切り開くとハンドル体になることから、ハンドル体の境界である、向き付けられた曲面上の単純閉曲線を文字列で表し、イソトピー変形およびハンドル体の内側と外側を入れ替える操作に対応する文字列の変形を与えた。研究過程で困難にぶつかり、当初目指していたところまでは至らなかったが、目的を絞り直し、課題を簡素化して引き続き取り組みたい。

(2) 3次元多様体内の本質的 lamination と、strongly irreducible な Heegaard 分解を与える Heegaard 曲面との交わりの曲線を、本質的 branched surface を利用して調べた(小林毅氏との共同研究)。ここで本質的 lamination は本質的曲面と葉層構造の中間の性質をもつものである。本質的曲面と strongly irreducible な Heegaard 分解を与える Heegaard 曲面は本質的な simple closed curves で交わるようにできることが知られており、これはその本質的曲面を本質的 lamination に置き換えたものである。特に Heegaard 曲面の種数が2のとき、類似の結果を得た。またコンパクトな対象では起こらない興味深い現象が起こることを確認した。

具体的には、種数2の strongly irreducible な Heegaard 分解をもつ3次元多様体と、そこに入る横断的向きづけ可能で、非自明なホロノミーを持たない、nowhere dense な本質的 lamination が与えられたとき、Heegaard 分解の連続変形を考えると、Heegaard 曲面と本質的 lamination の葉との交わりが、Heegaard 分解の片側で円板を張る曲線から一斉にコンパクトでない曲線へと変化する現象を観察し、この現象について研究発表を行った。

本質的 lamination と Heegaard 曲面の交

わりを調べるという研究は、今までなされていなかった新しいものであり、今後の発展が期待できる。例えば本質的 lamination の葉に対して、種数にあたる、位相的な複雑さを表す概念を導入した上で、より複雑な葉に対して、あるいはより種数の高い Heegaard 曲面に対してさらに研究をすすめることができれば多様体と、許容される本質的 lamination の葉の位相的性質との間の関連が明らかにされると期待される。

研究代表者は、遠藤久顕氏、蒲谷祐一氏、桐生裕介氏、澁谷一博氏、宮地秀樹氏、柳川浩二氏と共同で、研究集会 Workshop-Lefschetz fibration and category theory-を開催した。講演者は秋吉宏尚氏、足利正氏、伊山修氏、岩切雅英氏、落合理氏、古宇田悠哉氏、逆井卓也氏、佐藤正寿氏、佐藤好久氏、澁谷一博氏、下元数馬氏、玉木大氏、丹下基生氏、中岡宏行氏、野坂武史氏、野原雄一氏、平澤美可三氏、廣瀬進氏、二木昌宏氏、松田能文氏、茂手木公彦氏、柳川浩二氏、山田澄生氏、横田 佳之氏、渡邊忠之氏である。この集会は研究代表者が情報収集するにあたって、また共同研究を進めるにあたって大変有益であった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

- ① H. Murai, Gap of codimension one foliations, Kobe Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 29, 2012年, 1-24

[学会発表] (計10件)

- ① 小林毅、村井紘子, A Haken type theorem on intersections of essential laminations and genus 2 Heegaard surfaces, 九大トポロジー金曜セミナー, 2011年7月22日、九州大学伊都キャンパス
- ② 小林毅、村井紘子, A Haken type theorem on intersections of essential laminations and genus 2 Heegaard surfaces, Workshop on Topology and Geometry-Heegaard splitting of 3-manifolds-, 2011年6月28日、広島大学

- ③ T. Kobayashi、H. Murai、A Haken type theorem on intersections of essential laminations and genus 2 Heegaard surfaces、Workshop on Low Dimensional Topology in Shanghai and Suzhou、2011年5月17日、Suzhou University、China
- ④ 小林毅、村井紘子、Toward Haken type theorems for essential laminations in 3-manifolds、東北大学幾何セミナー、2011年1月18日、東北大学
- ⑤ 小林毅、村井紘子、Toward Haken type theorems for essential laminations in 3-manifolds : Proposal of fundamental settings and applications、The Seventh East Asian School of Knots and Related Topics、2011年1月11日、HAKUWA ホテル、広島
- ⑥ 小林毅、村井紘子、Toward Haken type theorems for essential laminations in 3-manifolds : Proposal of fundamental settings and applications、E-KOOK セミナー2010、2010年8月28日、大阪市立大学学術情報センター
- ⑦ 村井紘子、結び目理論と語のトポロジー理論、2009年度数学・物理学・情報科学の研究交流シンポジウム、2009年12月19日、奈良女子大学
- ⑧ 小林毅、村井紘子、Essential laminations and the distance of Heegaard splittings、葉層構造と微分同相群研究集会 (Foliations and Groups of Diffeomorphisms)、2009年10月27日、東京大学玉原国際セミナーハウス
- ⑨ 村井紘子、結び目補空間の葉層構造について、大阪市立大学院生談話会、2009年10月3日、大阪市立大学
- ⑩ H. Murai、Introduction to essential laminations、奈良女子大学低次元トポロジー小研究会、2009年8月17日、奈良女子大学

[その他]
ホームページ等

<http://koto10.nara-wu.ac.jp/Profiles/10/0000903/profile.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

村井 紘子 (MURAI HIROKO)
奈良女子大学・理学部・助教
研究者番号：40456843