様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年　6 月　1 日現在

機関番号：37102
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2009～2012
課題番号：21740056
研究課題名（和文）滑らかな多様体で定義された微分方程式の解のなす普遍複体の理論の構成
研究課題名（英文）Toward construction of the universal complex of the solutions of differential equations

研究代表者
山本　卓宏（YAMAMOTO Takahiro）
九州産業大学・工学部・講師
研究者番号：60435972

研究成果の概要（和文）：
多様体上の１階常微分方程式を１階ジェット空間の超曲面ととらえると，その解は超曲面上の曲線となる．ある型の微分方程式の分類は発散図式の分類に帰着されることから，その発散図式の中の１つの写像である曲面間の写像について大域的トポロジーを研究した．具体的には，曲面間の滑らかな写像が与えられたとき，その写像を連続的に動かして得られるジェネリックな写像の特異点値集合上のカスプ特異点，２重点の数の最小値及び，その値の取りうる範囲を完全に決定した．

研究成果の概要（英文）：
1st order differential equations are considered as hypersurfaces in the 1st jet space and solutions of the 1st order differential equations are curves on the hypersurfaces. Since, the classification of divergence diagrams induces the classifications of a certain type 1st order differential equations, we study smooth maps between surfaces. It is well known that a smooth map between surface is approximated by a smooth map, which is called a generic map, whose singular values set is a regular curve with some cusps. For a smooth map, generic maps which are homotopic to the smooth map and whose singular values set are the simplest, in some sense, are studied. Furthermore, for a smooth map between surface, the pairs of the numbers of singularities, cups and nodes, on the singular values set of generic maps homotopic to the smooth map are determined.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：ジェネリックな写像，特異点論，微分方程式

１．研究開始当初の背景
現在活発に研究されている３次元や４次元多様体の位相に関する研究では，多様体上で定義される微分方程式が鍵となっている．例えば，多様体の上で定義された微分方程式を用いて計量を変形することで，その多様体を

幾つかのパーツに分けたり，微分方程式の解空間の不変量を用いて，その多様体の不変量を定義する．

一方，Morse 理論の一般化であるVassiliev-Saeki 複体の理論がある．粗く説明すると，この理論は研究対象の全体からなる集合（例えば，滑らかな関数全体）の中でジェネリックでなくなる集合（例えば，安定なモース関数でなくなる集合）に注目する．全体集合は大体の場合，無限次元のものであるが，ジェネリックでない部分集合は有限次元の余次元をもつ．この有限余次元の部分の隣接関係から普遍複体と呼ばれるコチェイン複体を構成し，このコホモロジーがジェネリックな元の不変量を定義する．例えば，以下の研究がなされている：

(1) Vassiliev による結び目の研究

(2) Arnold による平面曲線の研究

(3) Saeki-Yamamoto による，ジェネリックな写像の特異ファイバーの研究

(1)では，結び目不変量が(2)ではジェネリックな平面曲線の不変量が得られている．(3)では特異ファイバーのなす普遍複体のコホモロジー類はジェネリックな写像のコボルディズム不変量を定義することが示され，定義域４次元多様体のオイラー数公式や，符号数公式，第一ポントリャーギン類に関する公式が得られている．

２．研究の目的

(1) 本研究では，滑らかな多様体や滑らかなファイバー束の幾何構造をそれ上のジェネリックな写像の特異点を使って記述することを全体構想とする中で，2 次元や 3，4 次元といった低次元多様体の幾何構造をそれ上で定義された微分方程式の解の特異性を使って記述することを目的とする，特に，解の隣接関係から普遍複体と呼ばれるコチェイン複体を構成する理論を構成し，そのコホモロジー類を研究することを目的とする．

(2) 上記目的(1)のコホモロジー類が非自明であること，すなわち，意味のある不変量を誘導することを示すには，具体例が必要になる．この理由から，ジェネリックな写像の具体例を帰納的に構成する手法を確立することを第二の目的とする．

３．研究の方法

多様体上Ｍの１階常微分方程式Ｌを多様体Ｍ上の関数 M→R の１階ジェット空間J^1(M, R)の超曲面と考える．ここで，R は実数直線をあらわす．簡単な場合から考えることとし，M=R と置く．ここで，J^1(R, R)上の座標を

$$(x, y, p)$$

とし，微分形式

$$\theta = dy - p\,dx$$

が与えられているとする．微分方程式 L は，J^1(R,R)へのはめ込み写像 f:$R^2 \to J^1$(R, R)で与えられているとする．このとき，微分方程式 f:$R^2 \to J^1$(R,R)の解とは沈め込みμ:$R^2 \to R$ で

$$d\mu \wedge f^*\theta = 0$$

を満たすもののことである．以下の図式を参照する．

$$\begin{tikzcd} & & J^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \arrow[d, "\pi"] \\ (\mathbb{R},0) & (\mathbb{R}^2,0) \arrow[l, "\mu"'] \arrow[r] \arrow[ur, "f"] & (\mathbb{R}\times\mathbb{R},0) \end{tikzcd}$$

この状況の下，発散図式

$$(\mathbb{R},0) \xleftarrow{\mu} (\mathbb{R}^2,0) \xrightarrow{g} (\mathbb{R}\times\mathbb{R},0)$$

の分類を用いては Izumiya-Kurokawa や Takahashi はクレロー型微分方程式の分類を行っている．ここでは，発散図式の中の写像 g の特異値集合の隣接関係と写像μの逆像 μ^{-1}(t)の像 g(μ^{-1}(t))の隣接関係から普遍複体を構成することを目指す．写像ｇは曲面間の写像の局所モデルである．隣接関係を研究する準備として，曲面間の写像の研究に着手する．

４．研究成果

本研究では，２次元や 3，4 次元多様体のトポロジーを多様体上で定義された微分方程式の特異性を使って研究するための理論を構成することを目的としていた．しかし，普遍複体の理論の構成までは至らなかった．準備として考察した発散図式の中の曲面間の写像の大域的な性質を研究する中に重要な問題が見つかり，研究期間は主テーマの部分まで進展しなかったためである．ここまでの研究で得られた成果を以下に記述する．

(1)曲面間のジェネリックな写像の特異値集合上のカスプ特異点と２重点の数の和の最小値に関する研究

曲面間のジェネリックな写像 f:M→N の特異点集合Ｓ(f)の像ｆ(Ｓ(f))はＮの中でカスプ特異点付きの曲線になる．特異点集合の像ｆ(Ｓ(f))を特異値集合と呼ぶ，ここで，Ｍ上の点ｐが写像 f:M→N の特異点であるとは，ｐに

おけるヤコビ行列の階数が２よりも真に小さくなるときである．

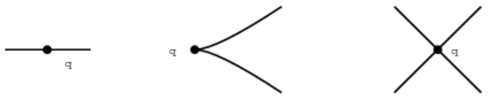

図１．特異値集合 f(S(f))の局所的な様子．真ん中をカスプ，右を２重点と呼ぶ．

この特異値集合は写像のトポロジーや定義域曲面のトポロジーをとてもよく反映する．コンパクトな曲面から曲面への写像のカスプ特異点の数を c，特異値集合上の２重点の数を n，特異点集合の成分数を i と書く．

閉曲面から球面への滑らかな写像 $f:M\to S^2$ に対して，定義域曲面の種数 g をジェネリックな写像 f の特異値集合から計算する次の公式が得られた：

$$g = \varepsilon\,[N + c/2 + (1 + I) - m(f)] \quad \cdots(*)$$

公式(＊)内の記号，N と I はそれぞれ，２重点，特異値集合の成分に関する代数的数であり，m(f)は正則値の逆像の最小値である．公式(＊)は球面への写像を扱っていることに注意したい．地球の各地点で観測したデータを発生源 M からの写像 $f:M\to S^2$ と捉えれば，公式（＊）から写像 f の特異値集合の様子から観測データの発生源 M の位相的な様子を調べることが可能になる．公式（＊）は非常に応用範囲の広い公式であると考える．地球科学や工学で応用されることを期待する．また，公式(＊)は定義域多様体が曲面であるが，曲面に限らず一般化することは今後の課題である．

公式（＊）を用いて，閉曲面から球面へのジェネリックな写像 $f:M\to S^2$ に対して，写像 f とホモトピックとなるジェネリックな写像で特異点集合が１つの成分からなるものの中で，特異値集合上のカスプ特異点 c の数と２重点の数 n の和 c +n の最小値を定義域閉曲面の種数 g，写像 f の写像度 d の関数として表示した．さらに，和 c +n が最小となるときのカスプ特異点の数 c と２重点の数 n の対(c, n)をそれぞれ，定義域閉曲面の種数 g，写像 f の写像度 d の関数として決定することができた．また，c +n が最小値のなる対(c, n)の決定から，次のことが分かった：

向き付け可能な閉曲面 M から球面 S^2 へのジェネリックな写像 $f:M\to S^2$ で，和 c +n が最小となるものに対しては２重点 n の数は偶数になる．

曲面間のジェネリックな写像で２重点の数 n が奇数であるものはたくさんあることに注意する．この系の２重点の数が偶数という結果は，向き付け可能な曲面のどういった性質を反映するものなのかは分かっていない．しかし，このような結果はこれまでの研究では得られていなく，非常に興味深い結果と考える．

ここまでの結果は，雑誌論文④にて公表済みである．この研究は次の①，②，③の研究に拡張されている．

① 向き付け可能な曲面 Σ_g，Σ_h の間の滑らかな写像 $f:\Sigma_g\to\Sigma_h$ に対して，写像 f と写像度の等しいジェネリックな写像の中で，カスプ特異点の数 c と２重点の数 n の和 c+n の最小値を定義域閉曲面 Σ_g の種数 g，写像 f の写像度 d，値域曲面 Σ_h の種数 h の関数として表わした．この結果をまとめたものは(5)投稿中の論文②である．

② 向き付け可能な閉曲面 Σ_g から球面への滑らかな写像 $f:\Sigma_g\to S^2$ に対して，写像 f とホモトピックとなるジェネリックな写像の中で特異点集合の連結成分数 i を固定したものの中で，カスプ特異点の数 c と２重点の数 n の和 c+n の最小値を定義域閉曲面 Σ_g の種数 g，写像 f の写像度 d，特異点集合の成分数 i の関数として表わした．この結果は，雑誌論文②にて公表済みである．

③ 境界成分が１つある曲面 M から平面への滑らかな写像 $f:M\to R^2$ で境界の近傍でははめ込みになっているものに対して，写像 f とホモトピックとなるジェネリックな写像の中で特異点集合の連結成分が 1 つであるものの中で，カスプ特異点の数 c と２重点の数 n の和 c+n の最小値を定義域曲面の種数 g，写像 f の写像度 d，境界成分の回転数 r の関数として表わした．この結果を現在，執筆中の論文①にまとめている．

(2) 閉曲面から球面へのジェネリックな写像で最も単純な特異値集合の形に関する研究

閉曲面から球面への滑らかな写像 $f:M\to S^2$ に対して，f とホモトピックとなるジェネリックな写像で特異点集合の成分数が１であるものの中で，カスプ特異点の数 c，２重点の数 n，特異点集合数 i のなす３つ組(c, i, n), (n, c, i), (i, n, c)それぞれに対して，辞書式順序に関する最小値を定義域閉曲面の種数g，写像fの写像度dの関数としてあらわした．この結果は，雑誌論文④にて公表済みである．

(3) 向き付け可能な閉曲面から球面へのジェネリックな写像の特異値集合上の特異点数の決定

3つの数d，g，iを固定したとき，種数gの向き付け可能な閉曲面Σ_g M から球面S^2への写像度 d のジェネリックな写像$\Sigma_g \to S^2$で特異点集合の数がiであるもの全体の中で，カスプ特異点の数cと2重点の数nの取りうる値を決定することができた．本研究を行うにあたり，与えられた曲面間の写像 f:M→N に対して，定義域曲面Mに対する手術に伴う写像fの変形を整理した．この結果をまとめたものは投稿中の論文①であり，ホームページにて公表している．

この研究は与えられた向き付け可能な閉曲面から球面へのジェネリックな写像の特異点数を全てリストアップするものであり，この方向の研究の基盤となるものである．今後，この研究を元に曲面間の写像の研究の更なる深化が深められることを期待する．

(4)その他

雑誌論文③，④の Survey を雑誌掲載論文①にまとめた．①には Survey の他に，③や④で研究対象としているジェネリックな写像の特異値集合上の特異点数の最小値に関する問題の形式化を行い，今後の研究対象となる幾つかの問題を提出した．

当初予定の研究計画の主テーマの部分には到達せず，準備段階で研究期間が終わってしまったのは残念である．しかし，この準備で今後に続く多くの課題を得ることが出来た．ここで蓄積できた知識や資料を元に本研究課題を今後も続けていきたいと考える．

(5) 投稿中の論文

① T.Yamamoto, *Geography of the singularities of stable maps of closed surfaces*.
② T.Yamamoto, *Apparent contours of* C^∞ *maps between closed surfaces with one connected component*

(6) 執筆中の論文

① T.Yamamoto, *Apparent contours of admissible smooth maps into the plane*

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計4件）

① T.Yamamoto, *Survey of apparent contours of stable maps between surfaces*, Proceedings of The 6th Franco-Japanese Symposium on Singularitiesに掲載決定済，査読有
② T.Fukuda and T. Yamamoto, *Apparent Contours of Stable Maps into the Sphere*, Journal of Singularities, 査読有, 3 (2011), 113-125, DOI: 10.5427/jsing.2011.3g
③ T.Yamamoto, *Apparent contours with minimal number of singularities*, Kyushu Journal Mathematics, 査読有, 64 (2010), no 1, 1-16, DOI: 10.2206/kyushujm.64.1
④ A.Kamenosono and T.Yamamoto, *The minimal numbers of singularities of stable maps between surfaces*, Topology and its Applications, 査読有, 156 (2009), no. 14, pp. 2390-2405,DOI:10.1016/j.topol.2009.06.010

〔学会発表〕（計10件）

① T.Yamamoto, *Geography of the singularities of stable maps of closed surfaces*, 可微分写像の特異点論とその応用，2012年12月11日，日本大学文理学部
② T.Yamamoto, *Geography of the singularities of stable maps of closed surfaces into the plane*, 第127回 日本数学会九州支部会，2012年10月27日，大分大学
③ T.Yamamoto, *Topology of the set of singular values of stable maps*, 12th International Workshop on Real and complex Singularities, July 24 2012, Sao Carlos (Brazil)
④ T.Yamamoto, *Topology of the singular value sets of stable maps*, AMS Sectional Meeting, AMS Special Session on Singularities, Stratifications and Their Applications, March 3 2012, Hawaii University (America)
⑤ T.Yamamoto, *Topology of the singular value sets of stable maps*, 第7回 代数・解析・幾何学セミナー，2012年2月14日，鹿児島大学
⑥ 山本卓宏，*安定な可微分写像の特異点と*

特異値集合について，トポロジーシンポジウム，2011 年 8 月 10 日，筑波大学
⑦ 山本卓宏，*境界付き曲面の平面像について*，日本数学会年会トポロジー分科会，2011 年 3 月 23 日，早稲田大学
⑧ 山本卓宏，*境界付き曲面の平面像について*，第 123 回　日本数学会九州支部例会，2010 年 10 月 16 日，長崎大学
⑨ T.Yamamoto, *Apparent Contours of Stable Maps into the torus*, 2009 日本数学会秋季総合分科会，2009 年 9 月 25 日，大阪大学
⑩ T.Yamamoto, *Apparent contours of stable maps between closed surfaces*, トポロジーと写像の特異点，2009 年 6 月 6 日，信州大学

〔その他〕
ホームページ等
http://www.kyusan-u.ac.jp/kougaku/th/yamamoto/index.html

６．研究組織
(1)研究代表者
山本　卓宏（YAMAMOTO Takahiro）
九州産業大学・工学部・講師
研究者番号：60435972

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：