様式 C-19

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　２５年　５月　３０日現在

機関番号：12102
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2009～2012
課題番号：21740063
研究課題名（和文）　結晶確率モデルの古典力学系による導出

研究課題名（英文）　Deriving crystallizing probability model from classical mechanics

研究代表者
梁　松（LIANG SONG）
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号：60324399

研究成果の概要（和文）：
理想気体環境に入れられた二つの重粒子が、環境軽粒子達とナン・ランダムな相互作用をしながら動く系について、軽粒子の質量が０に収束するとき、重粒子達の挙動を考えた。特に、二つの重粒子が異種類の場合については、ある反射壁を持つ拡散過程に収束することを証明した。また、同種類でありかつ重粒子達の挙動には相対効果がある場合については、対応している確率微分方程式族の極限を考えることにより、問題にしている極限過程の候補となる確率過程を具体的に求めた。波環境についても同問題を研究した。

研究成果の概要（英文）：
Put heavy particle(s) into an ideal gas environment, a system consists of infinitely many light particles with a certain initial distribution, and assume that the interactions between particles are non-random. We are interested in the problem of the limit behavior of the heavy particle(s) when the mass of the light particles converges to 0. When there are exact two heavy particles of different types, we proved that the distribution of the considered stochastic process converges to a diffusion with reflecting; for the case where the two heavy particles are of same type with relative efficiency, we found the concrete expression of the candidate limit process by proving the convergence of the corresponding stochastic differential equation. The similar problem with wave environment is also studied for the case with one heavy particle and in one-dimension.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：確率論
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：確率論

１．研究開始当初の背景

拡散過程は、一定の初期分布に従う無限個の軽粒子を含む理想気体と呼ばれる環境に入れられた重粒子の動きを表すモデルとしてよく使われる。なぜならば、直感的には、重粒子はたくさんの軽粒子に作用され、もし各軽粒子からの作用が独立であると仮定できるならば、独立同分布な確率変数の中心極限定理により、重粒子の挙動を拡散過程とみなせるからである。

ただし、ここでの独立性というのは、時間ごとの軽粒子間の独立性も、異なる時間における軽粒子達の状態に関する独立性も含まれている。しかし、現実的には、相互作用を考慮に入れたときの軽粒子達の分布が元の分布と異なるのは自明であり、重粒子と一度相互作用した軽粒子が再び重粒子と相互作用することもあり得るので、重粒子に作用する各軽粒子が独立同分布であると仮定するのは正しくない。

厳密的には、重粒子を入れる前の軽粒子環境は一定の確率分布に従い、軽粒子と重粒子間の相互作用がランダム性のない運動法則に従うとし、軽粒子の質量 m が 0 に収束するときの重粒子の挙動を議論することが必要である。

この問題は、1971 年に Holley によって初めて提出され、1 次元の、即ちすべての粒子は一次元で動く場合に関して研究された。その後、Durr-Goldstein-Lebowitz、Calderoni-Durr-Kusuoka 等により、一般次元数の場合に拡張された。しかし、いずれの研究も、重粒子が一個のみで、しかも粒子間の相互作用は衝突によるものだけである、即ち束縛条件を考えなくて済むという設定の下で問題を議論した。

このように、重粒子は複数あり、粒子間の相互作用がポテンシャルにより与えられる場合については、重要な問題ではあるが、殆ど研究されていなかった。

２．研究の目的

本研究の目的は、上述のように、一定の初期条件に従う無限個の軽粒子を含む理想気体と呼ばれる環境に一個以上の重粒子を入れ、軽粒子と重粒子間の相互作用がポテンシャルで与えられるランダム性のない運動法則に従うという系に関して、重粒子達の挙動を研究する。

特に、重粒子が二つある場合について、この二つの重粒子が同種類か異種類かによって状況が全く異なる。ここで、二つの重粒子が異種類というのは、軽粒子達との相互作用は、片方が斥力でありもう片方が引力であること。同種類というのは、これらの相互作用が同時に斥力または同時に引力である場合を言う。

ここで特に重要なのは、重粒子達に作用する軽粒子達に関して独立性という不自然な条件を課さずに、重粒子の挙動を議論することである。

３．研究の方法

本研究において、主に以下のアイデア・手法が使われた：

まず、二つの重粒子が異種類である場合について、軽粒子達の質量が 0 に収束する時、重粒子達の状態（位置と速度）の分布が収束することを証明できたが、その証明は二つのステップに分けられる。まずタイト性を証明

し、タイト性を証明できてから、次のステップとしてそれを用いて収束先を具体的に求めた。

タイト性を証明するとき、一番の難点は、重粒子達のみならず軽粒子達も同時に動いているので、系の動きを表す微分方程式が非常に複雑であり、解析が難しい。しかし、軽粒子達と比べれば、重粒子達の質量は非常に重く、従って速度も十分遅いので、軽粒子達の挙動を考えるとき、重粒子達は動いていない時のもので近似できるはず。上述の問題の解決策として、今述べたように、軽粒子達の挙動を、重粒子達が動いていない時のもので近似し、この近似の精密な誤差評価も具体的に与えたのがポイントである。この近似により、考える常微分方程式が元の方程式より簡潔なものとなり、具体的な性質を議論することが可能になった。

上述の近似により、重粒子達の状態を表す過程を“マルチンゲール項（ジャンプ可）＋ドリフト項＋十分小さい剰余項”と分解できた。ここで、この分解の各項について、時間に関する連続性に拘らなかったのもポイントの一つである。なお、収束先の具体的な表現を求めるときはマルチンゲール理論を用いて求めたが、その時にもこの分解が使われている。

次に、二つの重粒子が同種類である場合の極限を与えるために、対応している確率微分方程式の極限を研究した。重粒子の挙動には相対効果がある、即ち重粒子の速度は光速を越えられないモデルを考えた。

この問題に関して、一番の難点は極限における速度の非連続性である。詳しく説明すると、ポテンシャル関数の具体的な形から分かるように、極限過程は（存在と仮定して）二つの相を持っていることが予想される。重粒子が十分遠い所では、ポテンシャルの値が 0 であるので元々の確率微分方程式は実質パラメータを含んでいない、よって極限を取っても同じ拡散過程が現れる。これが拡散過程相を与えてくれる。一方、重粒子の原点との距離がある閾値を下回ると、ポテンシャルの効果により運動量が瞬間的に無限大になり、速度は光速になる。これが第二の相：等速運動相である。また、等速運動相では重粒子はある特定な場所では反射されて再び二つの相の境界に戻る。

問題は、重粒子が等速運動相から二つの相の境界に戻った時、どんな挙動を取るのか？再び反射して等速運動相に留まるのか？それとも拡散過程相に突入するのか？また、拡散過程に入るのなら、初期速度はどんな値を取るのか？実はこれが今の問題の一番の難点である。

本研究では、二つの新しい確率過程を導入することによりこの問題を解決した。具体的には、まず「総ポテンシャル」という確率過程 H_t を考えると、これは重粒子がどの相にあっても常に有限な値を取り、しかも満たしている確率微分方程式も具体的に与えることができる。即ち、H_t は常時追跡可能である。一方、拡散過程相では、運動量の長さは H_t によって一意的に定まる。さらに、等速運動相で運動量は無限大にはなるが、実は、無限大になるのは位置と同じ方向の成分だけである。よって、「運動量の位置に直行する成分」 R_t を考えれば、これも常に有限であり、しかも追跡可能である。即ち、重粒子が等速運動相から二つの相の境界に到着したとき、重粒子がどんな挙動を取るかは H_t とR_t の値

によって完全定められる。

４．研究成果

本研究の成果として、軽粒子達と重粒子達の間の相互作用がポテンシャルにより定められるナン・ランダムな運動法則に従い、重粒子を入れる前の軽粒子環境は一定の確率分布に従うという系について、以下の問題を解明できた：

まず、二つの重粒子達が異種類、即ち、軽粒子達との間の相互作用は、片方が斥力でありもう片方が引力である場合について、軽粒子達の質量が 0 に収束する時、重粒子達の状態（位置と速度）がある反射壁を持つ拡散過程に収束することを証明した。

また、二つの重粒子が同種類で相対効果がある場合に対応する確率微分方程式の極限を考え、「総エネルギー」及び「運動量の位置に直行する方向の成分」という二つの新しい確率過程を導入することにより、確率微分方程式の解の分布が収束することを証明し、極限過程の具体的な形を求めた。これは同種類重粒子の場合の極限の候補を与える。

また、波環境においても同じ問題を考え、１次元かつ１重粒子の場合について、重粒子の挙動を表す確率過程の分布が収束することを証明し極限の具体的な形を求めた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３　件）

① S. Kusuoka and S. Liang, A classical mechanical model of Brownian motion with one particle coupled to a random wave field, Stochastic Analysis and Applications Vol. 30, Issue 3 (2012) 493-528, 査読あり
DOI: 10.1080/07362994.2012.668444

② S. Kusuoka and S. Liang, classical mechanical model of Brownian motion with plural particles, Reviews in Mathematical Physics Vol. 22, No. 7 (2010) 733-838, 査読あり
DOI: 10.1142/S0129055X10004077

③ Y. Tahara and S. Liang, A formula to compute implied volatility, with error estimate, Interdiscip. Inform. Sci. 15 (2009), no. 2, 267-272.　査読あり
DOI 10.4036/iis.2009.267

〔学会発表〕（計　１ 件）

Song Liang, ２０１２年度確率論シンポジウム“Stochastic Hamiltonian equation With Uniform Motion Area”, ２０１２年１２月１８日――２１日　京都大学

６．研究組織
(1)研究代表者
梁　松（LIANG SONG)
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号：60324399