

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 27 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2012

課題番号：21740078

研究課題名（和文）粘弾性流れ問題の数値解析

研究課題名（英文）Numerical Analysis of Viscoelastic Flow Problems

研究代表者

田上 大助 (TAGAMI DAISUKE)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授

研究者番号：40315122

研究成果の概要（和文）: いくつかの線形あるいは非線形モデルに基づく粘弾性流れ問題に通常の混合型有限要素法や圧力安定化有限要素法を適用し、誤差解析や数値実験を行った。厳密解が分かっている問題では数理的正当化によって得られた誤差評価が再現できることを、急縮小流れと呼ばれる良く知られた物理的な検証問題では実験で観測される渦長が再現できることをそれぞれ確認し、提案した数値計算手法の信頼性向上に寄与した。

研究成果の概要（英文）: Error analysis and numerical experiments are performed for conventional mixed finite element methods and pressure stabilized finite element methods of viscoelastic flow problems based on some linear and nonlinear constitutive models. When using methods of manufactured solutions, error estimates established from the mathematical justification have been numerically confirmed; when using a benchmark problem “abrupt contraction channel flow”, the numerical vortex length has been consistent with the experimental one. Therefore, the research has contributed to improvement of the reliability of numerical schemes.

交付決定額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野: 数値解析学, 計算力学, 数値流体力学

科研費の分科・細目: 数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード: 粘弾性流れ, 3場ナビエ・ストークス方程式, オルドロイド B 方程式, ギースカスモデル, PTT モデル, 圧力安定化有限要素法, 最適誤差評価, 急縮小管流れ

## 1. 研究開始当初の背景

流れ問題の数値計算では、最初に水や空気に

代表される粘性流体(ニュートン流体)を対象とした研究が進展し、本研究課題で対象とする粘弾性流体(非ニュートン流体の一つ)の研

究は、物質の持つ流動特性の複雑さゆえにやや遅れをとっていた。1980年代から1990年代にかけて考案されたEVSS法やCONNFESSIT法などの計算手法により、ようやくその一部が実用的なものとなった。その後も、例えばCodinaなど多くの研究者の手で計算手法の改良が行なわれている。ただしこれら一連の研究では、用いる計算手法に対する数理的な理論整備にはあまり関心が払われていない。

一方で特定の問題、例えば線形粘弾性モデルの一つである移流項を考慮しない簡略化オールドロイドBモデルの計算手法に対しては、ある定常問題の場合にPicasso-Rappazで、ある非定常問題の半離散化問題の場合にBonitoらで、それぞれ有限要素法の提案とその数理的正当化がなされている。ただし線形粘弾性モデルは、現実の粘弾性流れに見られるずり流動化や伸張流動挙動のような複雑な現象を表現できないことが良く知られている。

したがって本研究課題は、実際の粘弾性流れにより近いと考えられている非線形粘弾性モデルを用いた粘弾性流れ問題の計算手法に対する数理的な理論整備を展開することで、数理的・実用的いずれの観点から見ても有効性のある、粘弾性流れ問題に対する計算手法を構築するための第一歩と位置づけられる。

## 2. 研究の目的

人体における血液の流れや射出成型におけるプラスティックの流れといった粘弾性流れは、理論的にも実的にも重要な物理現象の一つであり、数値計算によって現象を理解しようという試みが活発に行なわれている。しかしながら用いる計算手法に対する数理的な理論整備は遅れている。そこで研究代表者は、水や空気に代表される粘性流れ問題の有限要素解析で得た成果を発展させることで、粘弾性流れ問題の数値計算に対する数理的な理論整備を進めていくとの着想に至った。

本研究課題ではその第一歩として、3場ナビエ・ストークス方程式や簡略化オールドロイドBモデルを取り上げ、計算手法の数理的正当化へ向けた理論整備、さらにこれらの線形モデルと比較してより一般的なギースカモデルやPTTモデルなどの非線形モデルを用いた粘弾性流れ問題を取り上げ、計算手法の提

案とその数理的正当化の準備、正当化した手法に基づくプログラムの開発・実装と現実問題への適用、の2点を目的とする。

## 3. 研究の方法

本研究課題ではまず、非定常3場ナビエ・ストークス方程式の有限要素解析を行なった。次に、3場ナビエ・ストークス方程式に対して数学的に正当化された計算手法を、簡略化オールドロイドBモデル、ギースカモデル、およびPTTモデルなどの非線形モデルに基づく構成方程式を用いた非定常粘弾性流れ問題に適用し数値実験を行った。また提案した手法を、流体の占める領域が時間に依存するような移動境界を持つ粘弾性流れ問題へと拡張するための準備として、多角形領域上の移動境界問題の数値実験も行った。

### (1) 非定常3場ストークス問題の有限要素解析

本研究課題が対象とする問題の線形化によって導かれるこの方程式は、非線形粘弾性モデルに対する有限要素解析に必要な数値計算手法の安定性に関する基礎的な知見を得るために重要である。研究代表者が粘性流れ問題の有限要素解析で得た、非線形残差項の取り扱いなどに関する知見を活用することで、誤差評価の導出が期待できる。

### (2) PC クラスタを用いた数値計算の実行

数理的に正当化された3場ナビエ・ストークス方程式に対する有限要素法を、簡略化オールドロイドBモデル、ギースカモデル、およびPTTモデルに基づく構成方程式から導かれる粘弾性流れ問題へ拡張し、計算機に提案した計算手法を実装した。まず厳密解の分かっている試験問題を用いて、数理的理論で期待される誤差の収束次数が再現できるかどうかの確認を行った。その後、提案した計算手法の急縮小管流れ問題への適用を行った。急減少部分に発生する渦の直径を物理実験の結果と比較することで、計算手法の実用問題への適用可能性を検討した。

### (3) 研究成果の発表および情報収集

以下に挙げたものを中心に、本研究課題に密接に関連した国際会議および国内会議への参加を通して、成果発表や最新情報の収集など

を行なった。

ICIAM2011(2011年7月; バンクーバー, カナダ), WCCM2012(2012年7月; サンパウロ, ブラジル), ECCOMAS2012(2012年9月; ウィーン, オーストリア), 計算工学講演会, 日本機械学会計算力学部門講演会, 日本応用数理学会年会, 数値流体力学シンポジウム。

#### (4) 研究を遂行する上での具体的な工夫

共同研究者が専門とする超大規模有限要素計算に関する知見, とくにプログラムの実用性を向上させるための並列計算や計算コスト削減に関する知見を得ることで, 開発した計算手法の現実問題への適用を行なう際に, 計算コストの削減や導入したPC クラスターのより効果的な利用についての知見を得ることができた。

また産業界で計算機支援設計を行っている企業所属研究者との研究打ち合わせを行なう。これにより急縮小管流れ問題などで行った数値実験において, 問題設定, 現象の考察などに関してより現実に即した知見を得ることができ, その実用性の向上が期待できた。

### 4. 研究成果

#### (1) 3 場ナビエ・ストークス方程式の有限要素法に対する最適誤差評価

3場ナビエ・ストークス方程式の有限要素方程式は, 非線形粘弾性流れ問題の構成方程式に現れる移流および速度勾配と非ニュートン応力からなる非線形項を無視した問題の有限要素方程式と対応している。本段階で対象とする問題の有限要素解析を行うことで, 誤差評価に必要な有限要素方程式の安定性に関して, 基礎的な知見を得ることが期待できる。

研究代表者がこれまでに非定常熱対流問題などの有限要素解析で得た様々な非線形残差項の評価, 特に, 離散 Gronwall 不等式の適用手法などを応用することで, 3場ナビエ・ストークス方程式の有限要素法に対して, 最適な誤差評価を得ることができた。なお得られた誤差評価は, 流速と圧力の近似空間の組合せが下限上限条件を満たす通常の適合混合型有限要素(例えば流速・圧力・非ニュートン応力の近似にP2/P1/P1要素)を用いる場合だ

けでなく, 将来の大規模3次元計算を念頭に, 圧力安定化された適合型同次有限要素(例えば流速・圧力・非ニュートン応力の近似にP1/P1/P1要素)を用いる場合に対しても証明を行った。

さらに誤差評価を導いた有限要素法に基づく計算手法を計算機に実装し, 通常の混合型有限要素, あるいは圧力安定化有限要素をそれぞれ用いた場合に, 理論的に得られた最適な誤差評価を数値実験によって確認した。Fig.1はP1/P1/P1圧力安定化有限要素法を用いた場合の相対誤差を示す。グラフはそれぞれ異なるノルムを用いて測定した相対誤差を表しており, 縦軸が相対誤差, 横軸が離散化パラメータの両対数グラフである。いずれのノルムでも離散化パラメータが小さくなるにつれて一定の傾きで相対誤差が小さくなっていく様子が分かる。

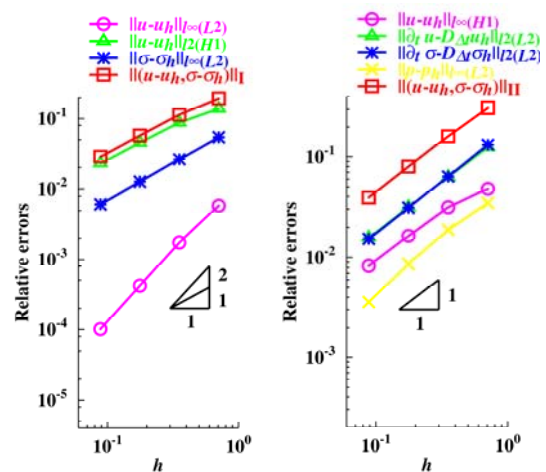


Fig.1: 3 場ストークス方程式に対する有限要素解の収束。

また提案した計算手法を, 将来, 大規模3次元計算へ適用するための準備として, ある熱対流問題および光波散乱問題に対する有限要素計算と, ある静磁場問題の領域分割法に関する数学的正当化や数値実験を行った。これにより, 大規模問題を計算機へ実装するための様々な知見を得ることができた。

#### (2) 簡略化オールドロイド B 方程式の有限要素法に基づく数値計算

簡略化オールドロイド B 方程式の有限要素方程式は, 3場ナビエ・ストークス方程式で無視した非線形項のうち, 粘弾性流れの構成方程式において本質的となって現れる流速勾配と

非ニュートン応力からなる非線形項を考慮する。したがって、本段階で対象とする問題の有限要素解析を行うことで、最終的な誤差評価に必要な有限要素方程式の安定性に関して、基礎的な知見を得ることができる。

3場ナビエ・ストークス方程式に対する有限要素近似の場合と同様に、時間方向の近似に後退オイラー法を、空間方向の近似には流速と圧力の近似空間の組合せが下限上限条件を満たす通常の適合混合型有限要素(例えば流速・圧力・非ニュートン応力の近似にP2/P1/P1要素)と、将来の大規模3次元計算を念頭に圧力安定化された適合型同次有限要素(例えば流速・圧力・非ニュートン応力の近似にP1/P1/P1要素)の2つの場合で、それぞれ数値実験を行った。

まず厳密解の分かっている検証問題において、提案した手法から期待される最適な誤差の収束次数が得られていることを数値的に確認した。次に、粘弾性流れ問題における検証問題として良く知られている急減少管流れ問題を用いて、管の直径が急激に減少する部分に発生する渦の振る舞いを数値実験によって捉え、いくつかの物理パラメータの元で、実験結果と一致する計算結果を得た。Fig.2は、レイノルズ数を変化させて、管の直径が急激に小さくなる部分に発生する渦の長さの変化を測定したものである。オールドロイドB方程式の場合に実験値(黄色×印)と、計算値(赤色○印)が定性的には比較的良好に一致していることが分かる。

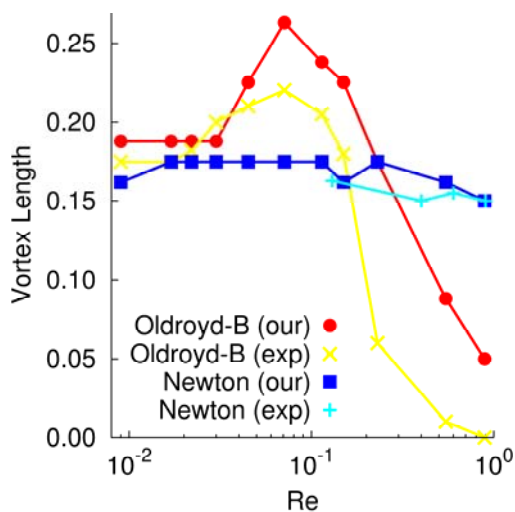


Fig.2: 4対1急縮小管流れにおける剥離渦長の比較.

### (3) ギースカスモデルおよびPTTモデルの有限要素計算

簡略化オールドロイドB方程式で行った数値実験を、より一般の粘弾性流れを表すことが可能なモデルとして知られているギースカスモデルおよびPTTモデルを用いた粘弾性流れ問題でも行った。これまでに提案してきた計算手法と同様に、時間方向の近似に後退オイラー法を、空間方向の近似に圧力安定化された適合型有限要素(流速・圧力・非ニュートン応力の近似にP1/P1/P1要素)を用いた。

まず厳密解の分かっている検証問題において、提案した手法から期待される最適な誤差の収束次数が得られていることを、離散化パラメータに対する適当な条件の下で数値的に確認した。次に、急減少管における渦の生成の様子の数値実験を行い、数値モデルが実際の物理現象を良く表している範囲の物理パラメータの元で、実験結果と一致する計算結果を得た。

### (4) 多角形領域上における移動境界流れ問題の有限要素計算

これまでに述べてきた計算手法を、流体領域が時間と共に変化するような粘弾性流れ問題へと拡張するための準備として、領域内部の流れがヘレ・ショウ流れやストークス流れで支配される多角形領域上の移動境界流れ問題の数値計算を行った。

Benešらによって提案された多角形曲率を利用することで、用いた計算手法は、時間方向の離散化パラメータに関して2次収束する、面積保存性が離散問題でも維持される、という特徴を持つ。本研究課題では、凸領域の場合だけでなく凹領域の場合や多角形の縮退が起きるような初期形状の場合でも数値計算が可能となるように、時間刻みを可変にすることで二分法により多角形の縮退が起きる時刻を求めて再計算を行う計算手法を提案した。

これにより、より一般の領域形状を持つ場合の数値計算が可能になった。本研究課題では実際に数値実験を行い、提案した計算手法が十分に良好な面積保存性を維持していることを確認した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

Kimura, M., Tagami, D., and Yazaki, S., Polygonal Hele-Shaw Problem with Surface Tension, Interfaces and Free Boundaries, 査読有, Vol.15, 2013, pp.77-93.

Mizuyama, Y., Shinde, T., Tabata, M., and Tagami, D., Finite Element Computation for Scattering Problems of Microhologram using DtN Map, JSIAM Letters, 査読有, Vol.2, 2010, pp.45-48.

[学会発表] (計 20 件)

田上 大助, 門田 昂也, 面積保存スキームを用いた移動境界流れの有限要素計算, 第 26 回数値流体力学シンポジウム, 2012 年 12 月 19 日, 国立オリンピック記念青少年センター (渋谷区).

田上 大助, 有限要素法を用いた流れ問題の数値解析 誤差評価から並列計算まで, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会 応用数学分科会 特別講演, 2012 年 9 月 21 日, 九州大学 (福岡市), 招待講演.

Tagami, D., Numerical Analysis of Moving Boundary Problems using an Area- Preserving Scheme, The 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOAMS2012), 2012 年 9 月 12 日, ウィーン大学 (ウィーン市, オーストリア).

田上 大助, いくつかの異なる構成方程式を用いた粘弾性流れ問題の有限要素解析, 日本応用数理学会 2012 年度年会, 2012 年 8 月 29 日, 稚内全日空ホテル (稚内市).

田上 大助, 時間 2 次精度の面積保存スキームを用いた移動境界流れ問題の数値解析, 第 17 回計算工学講演会, 2012 年 5 月 31 日, 京都教育文化センター (京都市).

安藤 和博, 田上 大助, 圧力安定化有限要素法を用いた粘弾性流れの数値計算, 日本応用数理学会 2012 年研究部会連合発表会, 2012 年 3 月 8 日, 九州大学 (福岡市).

田上 大助, 粘弾性の数理モデル, ワークショップ “連続体力学の現象と数理 II”, 2012 年 2 月 21 日, 九州大学 (福岡市).

Tagami, D., Numerical Computations of Stokes Flows with the Moving Boundary by an Area-Preserving Scheme, Workshop on Reliability in Scientific Computing and Related Topics, 2011 年 11 月 25 日, 九十九島ビクターセンター (佐世保市).

田上 大助, 粘弾性流れ問題の数値計算, 第 24 回計算力学講演会, 2011 年 10 月 10 日, 岡山大学 (岡山市).

古田 賢司, 田上 大助, 移動境界を持つ Stokes 流れ問題の面積保存スキームを用いた数値計算, 日本応用数理学会 2011 年度年会, 2011 年 9 月 16 日, 同志社大学 (京都市).

田上 大助, 古田 賢司, 木村 正人, 面積保存スキームを用いた移動境界問題の数値計算, 第 16 回計算工学講演会, 2011 年 5 月 25 日, 東京大学 (柏市).

田上 大助, 粘弾性の数理モデル, ワークショップ “連続体力学の現象と数理”, 2011 年 2 月 21 日, 九州大学 (福岡市).

田上 大助, 流れ問題の有限要素計算と誤差評価, 明治大学 GCOE 現象数理学の形成と発展, 第 8 回現象数理若手シンポジウム 航空機の数理流体モデルと数値解析, 2011 年 1 月 12 日, 明治大学 (川崎市), 招待講演.

田上 大助, 粘弾性流れ問題の有限要素計算と誤差評価, 研究集会 “数値解析と計算の信頼性評価”, 2010 年 11 月 21 日, ハウステンボス (佐世保市).

田上 大助, 粘弾性流れ問題の数値計算に対する数理的正当化, 第 23 回計算力学講演会, 2010 年 9 月 23 日, 北見工業大学 (北見市).

Tagami, D., A Finite Element Computation of Polygonal Moving Boundaries, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2010, 2010 年 8 月 30 日, チェコ工科大学プラハ校 (プラハ市, チェコ共和国).

田上 大助, Oldroyd-B モデルを用いた粘弾性流れ問題の有限要素解析, 第 15 回計算工学講演会, 2010 年 5 月 26 日, 九州大学 (福岡市).

田上 大助, 粘弾性流れ問題の有限要素解

析, 研究集会 “数値シミュレーションの理論と実践”, 2010年2月16日, 九州大学 (福岡市).

田上 大助, 粘弾性流れ問題の数値計算, 京都大学数理解析研究所研究集会 “数値解析と数値計算アルゴリズムの最近の展開”, 2009年12月15日, 京都大学 (京都市).

Tagami, D., Numerical Computations of Energy Balances in Thermal Convection Problems, First International Conference on Computational Methods for Thermal Problems (ThermaComp2009), 2009年9月8日, ヴィラ・ドリア・ダングリ (ナポリ市, イタリア).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

**田上 大助 (TAGAMI DAISUKE)**

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授  
研究者番号: 40315122

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号: