

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 24 日現在

機関番号：24403

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2012

課題番号：21740080

研究課題名（和文） 集合論的手法による位相空間論の新たな展開

研究課題名（英文） New development in topology with the method of set theory

研究代表者

嘉田 勝 (KADA, MASARU)

大阪府立大学・理学系研究科・准教授

研究者番号：00312447

研究成果の概要（和文）：本研究では、集合論的位相空間論におけるいくつかの問題を対象に、強制法をはじめとする集合論的手法を駆使して、新たな成果を得た。これらの成果は位相空間論の伝統的な手法のみでは得られないもので、集合論的手法の位相空間論における有用性が示された。対象とした問題は次のとおり。(1) 距離化可能空間の距離関数全体がなす順序構造の解析、(2) リンデレーフ空間の強制拡大による保存性と無限ゲームとの関係、(3) 各点が $G\delta$ 集合であるリンデレーフ空間の濃度の制約と巨大基数公理、(4) 点列の集合への収束の強制拡大による保存性。

研究成果の概要（英文）：The subjects of this project include: (1) Investigation into order structures consisting of sets of compatible metrics on metrizable spaces; (2) Interplay between preservation of the Lindelöf property under forcing extension and infinite games on Boolean algebras; (3) The role of large cardinal axioms in bounding the cardinality of Lindelöf spaces whose points are $G\delta$; (4) Preservation of convergence of a sequence to a set under forcing extensions. Most of achievements in this project were obtained using not only traditional method in general topology but also set-theoretic method such as forcing.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	500,000	150,000	650,000
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：位相空間論、強制法、巨大基数公理、距離化可能空間、コンパクト化、リンデレーフ空間、無限ゲーム。

1. 研究開始当初の背景

公理的集合論における 20 世紀の最大の成果は、コーエンによる連続体仮説の独立性証明である。連続体仮説とは「可算濃度と連続体

濃度の中間の濃度を持つ集合は存在しない」という主張だが、コーエンは 1963 年に、連続体仮説は集合論の標準的な公理系 (ZFC) から独立である（つまり、通常の数学的前提

のもとでは肯定的にも否定的にも証明できない)ことを証明した。コーエンはこの証明のために強制法 (forcing) と呼ばれる手法を開発したが、コーエンの結果が発表された後に強制法の理論は飛躍的に発展し、今日では強制法は数学的命題の集合論の公理系からの独立性を調べるためになくてはならない手段と認識されている。

一般位相空間論の研究では、集合論の公理系から独立であると予想される命題にしばしば行き当たるが、その命題が実際に独立であることを証明するためには、強制法が不可欠である。したがって、一般位相空間論の研究を推し進めるためには、位相空間論固有の知識だけでなく、公理的集合論の知識も求められる。しかし、残念ながら、研究開始当初は、公理的集合論に長けた位相空間論研究者も、位相空間論に積極的に参入する公理的集合論の研究者も、国内では少数であった。

本研究代表者は、主に自然数集合上の無限組合せ論的命題について、強制法を用いた独立性証明の研究を行ってきた。平成 17 年度からは、「距離に依存するコンパクト化の族によるストーン・チェックコンパクト化の近似可能性」および「実数集合の開被覆の選出の原理」という 2 つの一般位相空間論の問題を対象に、自然数集合上の無限組合せ論と強制法を用いて研究を始め、集合論の公理系からの独立性結果を含む結果を得た。

2. 研究の目的

位相空間論の問題の中には、自然数集合上の無限組合せ論的命題に帰着できるものが数多くあり、強制法を用いることで、位相空間論における多くの未解決問題が実は集合論の公理系から独立であることが判明する可能性があると考えた。また、研究の過程で、巨大基数公理などの公理的集合論特有の手法も位相空間論の未解決問題に深く関わっていることが明らかになった。

そこで、強制法をはじめとする公理的集合論の手法を駆使して位相空間論に積極的に参入することで、位相空間論の研究に新たな展開をもたらすことを目的に、本研究を推し進めた。

3. 研究の方法

本研究では、位相空間論の未解決問題のうち、特に、自然数集合上の無限組合せ論的問題に帰着できる問題や、強制法を用いることで解決が期待できる問題を選び、集合論の公理系からの証明可能性あるいは独立性を、無限組合せ論的手法と強制法を用いて調べた。

具体的には、次の課題を設定して研究を行った。

- (1) 距離化可能空間の距離関数全体がなす順序構造の解析

- (2) リンデレーフ空間の強制拡大による保存性と無限ゲームとの関係
- (3) 各点が G_δ 集合であるリンデレーフ空間の濃度の制約と巨大基数公理
- (4) 点列の集合への収束の強制拡大による保存性

本研究は嘉田 (研究代表者) が単独で実施したが、公理的集合論および位相空間論の専門的知識を持つ研究者との討論によって研究を加速するため、研究期間中に下記の研究者との相互訪問を頻繁に行い、研究討論を重ねた。討論で得られた知見は、本研究の成果のいたるところに反映されている。

(敬称略・所属は本研究期間終了時点)

- 梶野昌 (神戸大学)
- ブレンドレ ヨーグ (神戸大学)
- 薄葉季路 (名古屋大学)
- 吉信康夫 (名古屋大学)
- 友安一夫 (都城工業高等専門学校)
- 加茂静夫 (大阪府立大学)

課題(4)については、岩佐明氏 (サウスカロライナ大学ビューフォート校) との研究交流から生じた課題であり、岩佐氏との e メールでの連絡および加茂静夫氏との討論を行いながら研究を進め、成果を得た。

本研究で得られた成果を公表するため、国内外の研究集会などに参加し、逐一、その時点で得られていた成果を発表した (「5 主な発表論文等」の「学会発表」参照)。

4. 研究成果

- (1) 距離化可能空間の距離関数全体がなす順序構造の解析 :

G. Woods の先行研究により、距離化可能空間のストーン・チェックコンパクト化は、その空間上の位相を導くあらゆる距離関数に対応するスミルノフコンパクト化の族で近似されることが知られている。さらに、嘉田・友安・吉信による先行研究で、ストーン・チェックコンパクト化の近似のために必要な距離関数の集合の最小濃度について、実数の集合論で扱われる種々の基数不変量との関係が調べられていた。

本研究では、可分な距離化可能空間のスミルノフコンパクト化の全体によるストーン・チェックコンパクト化の近似が、その空間上の位相を導く距離関数全体の集合がなす順序構造と自然に対応づけられることを示した。そのうえで、距離関数全体の集合がなす順序構造の性質を、順序集合の共終な部分集合がなす構造を記述する一般的な枠組みのひとつである **generalized Galois-Tukey connection** の考えを用いて特徴づけた。さらに、その特徴づけを用いて、嘉田・友安・吉信の先行研究で知られていた「近似に必要な距離関数の集合の最小濃度」の結果を導き出

せることを示した（「5 主な発表論文等」の論文 1,5）。この意味で、本研究での成果は、距離化可能空間のコンパクト化の近似についての過去の研究成果をより一般化された形で包摂し、理論全体によりよい見通しを与えるものとなっている。

(2) リンデレーフ空間の強制拡大による保存性と無限ゲームとの関係：

強制拡大モデルにおいて基底モデルのリンデレーフ空間 (Lindelöf space) がリンデレーフの性質を持ち続けるかどうかを調べることは、一般には容易ではない。そこで、問題を限定するために、F. Tall 氏が導入した「不可壊リンデレーフ空間」(indestructible Lindelöf space) に着目して、強制拡大による保存性を調べた。

不可壊リンデレーフ空間は、定義により、可算な長さの下降列について閉じた強制概念による強制拡大で保存されるが、さらに広いクラスに属する強制概念について同様の保存性が成り立つこと、また、不可壊リンデレーフ空間を保存する強制概念のクラスは半順序集合上の無限ゲームを用いて自然に特徴づけられることを証明した。さらに、不可壊リンデレーフ性を強めた位相的性質であるロートベルガーの性質 (the Rothberger property) に着目し、やはり半順序集合上の無限ゲームを用いて特徴づけられる自然なクラスに属する強制概念による強制拡大では、ロートベルガーの性質が保存されることを証明した。

これらの結果は、(3)で述べる「各点が G_δ 集合であるリンデレーフ空間の濃度の制約」という問題と深く関わっており、今後の研究に大いに役立つことが期待できる。

また、コーエン強制、ランダム強制に関するリンデレーフ空間の保存性についても考察し、過去のさまざま結果を包摂し、かつ新たな結果を含む定理を証明した（「5 主な発表論文等」の論文 3,6）。

このテーマに関連して、不可壊リンデレーフ性と密接な関係のある遺伝リンデレーフ性 (hereditary Lindelöfness) について、無限ゲームとの関係を調べた。遺伝リンデレーフ性の強制法による保存は、薄葉氏、吉信氏との議論の結果、半順序集合についてのマーティンの公理と関連づけられることが判明した。

本研究期間中に、リンデレーフ性の保存と深く関連する半順序集合上の無限ゲームについて、薄葉氏が多くの新たな結果を証明した。それらの結果が強制法によるリンデレーフ性の保存性にどのような影響を及ぼすか、現在も薄葉氏と討論を重ねながら検討を重ねている。

(3) 各点が G_δ 集合であるリンデレーフ空間の濃度の制約と巨大基数公理：

A. Arhangel'skii 氏による位相空間論の古典的な結果のひとつに、「第 1 可算で、かつハウストルフの公理をみたすリンデレーフ空間の濃度は高々連続体濃度である」という定理がある。この定理の「第 1 可算」という要請を「各点が G_δ 集合である」に緩和した命題の証明可能性あるいは独立性は、集合論的位相空間論における有名な未解決問題のひとつである。この問題に関連して、空間がみたすべき性質を微妙に変化させて得られる派生的な命題の証明可能性や独立性を調べる研究がさかんに行われてきた。

F. Tall 氏は「超コンパクト基数の存在が無矛盾ならば、『各点が G_δ 集合である不可壊リンデレーフ空間の濃度は必ず連続体濃度以下である』という主張が無矛盾である」という定理を証明した。その後、M. Scheepers 氏は Tall 氏の結果における「超コンパクト基数の存在が無矛盾」という巨大基数の仮定を「可測基数の存在が無矛盾」に緩和できることを証明した。

Scheepers 氏の証明では、可測基数の組合せ論的性質を用いているが、証明の中には不自然で技巧的な議論が含まれていた。本研究では、Scheepers 氏による証明を再検討し、より簡単に自然な別証明を発見した（「5 主な発表論文等」の論文 4）。この結果については、さらにその後、薄葉氏がジェネリック超冪の手法を用いた別証明を発見しており、現在、薄葉氏による証明を詳細に検討し、関連する研究の発展の可能性を探っている。

これらの一連の結果は、巨大基数の組合せ論が不可壊リンデレーフ空間の性質に深く関連することを示唆しており、今後の研究の進展につながることを期待できる。

(4) 点列の集合への収束の強制拡大による保存性：

位相空間における点列の点への収束は強制拡大によって不変だが、点への収束の自然なアナロジーとして「点列の集合への収束」の概念を定義すると、強制拡大によって必ずしも保存されない性質となる。

本研究期間中に、岩佐氏は「なんらかの自然なクラスに属する強制概念で点列の集合への収束が保存されるために、空間がみたすべき条件は何か」という問題を提示した。この問題は自然数上の無限組合せ論と強制法の両方に深く関わっており、本研究課題と密接に関連することから、本研究の一環として岩佐氏および加茂静夫氏とともに研究に取り組んだ。

その結果、自然数上の無限組合せ論と位相的性質の強制拡大による保存性との間に興味深い関連が見出され、強制拡大の組合せ論

的分析に新たな視点をもたらす結果が得られた（「5 主な発表論文等」の学会発表 1）。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

1. Masaru Kada and Yasuo Yoshinobu. Galois-Tukey connection involving sets of metrics. *Tsukuba J. Math.*, Vol. 36(2012), pp. 53—66. 査読あり.
2. Masaru Kada. Preserving the Lindelöf property under forcing extensions. *Topology Proceedings*, Vol. 38 (2011), pp.237—251. 査読あり.
3. 嘉田勝. コーエン強制, ランダム強制に関する位相空間の性質の保存. 数理解析研究所講究録 1728「一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーの最近の話題とその応用」, pp. 72—78. 2011. 査読なし.
4. 嘉田勝. Remarks on Scheepers' theorem on the cardinality of Lindelöf spaces. 数理解析研究所講究録 1754「大きな無限と小さな無限の相互関係」, pp. 75—80. 2011. 査読なし.
5. Masaru Kada. How many miles to βX ? II — Approximations to βX versus cofinal types of sets of metrics. *Topology and its Applications*, Vol.157(2010), pp.1460—1464. 査読あり.
6. 嘉田勝. Remarks on the preservation of topological covering properties under Cohen forcing. 数理解析研究所講究録 1686「無限集合上の組合せ論と強制法理論」, pp. 63—72. 2010. 査読なし.

〔学会発表〕（計 17 件）

1. 岩佐明, 嘉田勝, 加茂静夫. 点列の集合への収束と強制拡大. 2012 年度 General Topology Symposium. 神戸大学. 2012 年 12 月 13 日.
2. 嘉田勝. A technique for proving preservation of topological properties under forcing extensions. 強制法による拡大と巨大基数 (RIMS 研究集会). 京都大学数理解析研究所. 2012 年 12 月 6 日.
3. 嘉田勝. 距離関数の順序構造と Galois-Tukey connection. 日本数学会秋季総合分科会 トポロジー分科会. 九

- 州大学. 2012 年 9 月 21 日.
4. 嘉田勝. バビロンまでは何マイル? — コンパクト化の近似と集合論. 第 59 回 トポロジーシンポジウム (佐賀大学). 2012 年 8 月 13 日. (招待講演)
5. 嘉田勝. 強制法による位相的性質の保存と無限ゲーム. 日本数学会年会 数学基礎論および歴史分科会. 東京理科大学. 2012 年 3 月 27 日.
6. Masaru Kada. Remarks on Scheepers' theorem on the cardinality of Lindelöf spaces. Joint FWF-JSPS Seminar on Forcing in Set Theory. 神戸大学. 2012 年 1 月 25 日.
7. Masaru Kada. Preservation of the Lindelöf property and infinite games on posets. TOPOSYM 2011 (11th Topological Symposium). Prague, Czech Republic. 2011 年 8 月 9 日.
8. Masaru Kada. Infinite games for preserving topological covering properties. BLAST 2011. Laurence, Kansas, USA. 2011 年 6 月 4 日.
9. 嘉田勝, 友安一夫, 吉信康夫. How many miles to βX , after all?. 2010 年度 General Topology シンポジウム. 筑波大学. 2010 年 12 月 20 日.
10. 嘉田勝. Remarks on Scheepers' theorem on the cardinality of Lindelöf spaces. 大きな無限と小さな無限の相互関係 (RIMS 研究集会). 京都大学数理解析研究所. 2010 年 10 月 25 日.
11. 嘉田勝. コーエン強制, ランダム強制に関する位相空間の性質の保存. 一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーの最近の話題とその応用 (RIMS 研究集会). 京都大学数理解析研究所. 2010 年 10 月 14 日.
12. Masaru Kada. Preserving topological covering properties under forcing extensions. International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications (V JAMEX). Colima, Mexico. 2010 年 9 月 27 日.
13. 嘉田勝. Preserving the Lindelöf property under forcing extensions. 第 45 回位相空間論シンポジウム. 大阪府立大学. 2010 年 6 月 5 日.
14. Masaru Kada. Preserving the Lindelöf property under forcing extensions. Boise Extravaganza in Set Theory 19 (BEST 2010). Boise, Idaho, USA. 2010 年 3 月 28 日.
15. Masaru Kada. Preserving the Lindelöf property under forcing extensions. 44th Annual Spring Topology and Dynamics Conference.

Starkville, Mississippi, USA. 2010年
3月18日.

16. Masaru Kada. Galois-Tukey connections involving sets of metrics. 24th Summer Conference on Topology and Its Applications. Brno, Czech Republic. 2009年7月16日.
17. 嘉田勝. Galois-Tukey connections involving sets of metrics. 第44回位相空間論シンポジウム. 島根大学. 2009年5月30日.

[その他]

ホームページ等

<http://www.mi.s.osakafu-u.ac.jp/~kada/kaken2009/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

嘉田勝 (KADA, MASARU)

大阪府立大学・理学系研究科・准教授

研究者番号：00312447