様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　３月３１日現在

機関番号：３２６０７
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2009～2010
課題番号：21740081
研究課題名（和文）　閉路問題の次数和条件について

研究課題名（英文）　Degree sum conditions for cycles

研究代表者
山下　登茂紀（YAMASHITA TOMOKI）
北里大学・一般教育部・講師
研究者番号：10410458

研究成果の概要（和文）：ハミルトン閉路を一般化した概念である relative length という不変量の研究を行い，relative length が１以下であるための４頂点次数和条件を得た．このことで，代表者らの提唱している閉路の存在を保証する次数和条件に関する予想に対して新たなる証拠を与えた．さらに，この予想における最長閉路の長さに関する研究を行い，その一部を解決した．また，ハミルトン閉路，指定された点を通る閉路と最長閉路の長さに対する２部グラフにおける次数和条件についての研究を行い，これらの次数和条件には，一般のグラフで見られた類似性が見られないことがわかった.

研究成果の概要（英文）：We researched the concept of relative length which is a generalization of a hamiltonian cycle, and obtained a condition of the degree sum of four vertices for relative length of a graph to be at most 1. By this result, we gave a new evidence for our conjecture concerning degree sum conditions for the existence of cycles. Moreover, we studied about the circumference version of this conjecture, and settled a part of it. On the other hand, we investigated degree sum conditions for hamiltonain cycles, cycles passing through specified vertices and the circumference in bipartite graphs. We could see the analogue for degree sum conditions in general graphs, but we could not see that for the degree sum conditions in bipartite graphs.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：組合せ論、グラフ理論、ハミルトン閉路、次数和条件

１．研究開始当初の背景

ハミルトン閉路の存在を保証する条件に関して，位数，次数和，連結度，独立数の４つの不変量が重要であることが知られている．特に，1960 年に Ore が２頂点次数和と位数の関係式を，1989 年に Bauer et al.が３頂点次数和と位数と連結度の関係式を，2000 年に Harkat-Benhamadine et al.が４頂点次数和と位数と独立数の関係式を与えている．申請者は，2008 年に小関健太氏との共同研究において，新しい２頂点次数和と４頂点次数和の関係式を与えた．それによって，４頂点以下の次数和と位数と連結度と独立数の関係式に規則性があることを見出し，５頂点以上の次数和に関しても，その規則が成り立つのではないかと予想した．しかし，４頂点以下の次数和に関するこれらの結果の証明方法は画一的なものでなく，次数和の頂点数が１頂点増えるとその証明が非常に煩雑になる傾向があった．よって，代表者らの予想を解決するためには，簡約な統一的な証明方法の確立が不可欠であった．

一方，ハミルトン閉路の一般化の概念である「指定された頂点を通る閉路」が存在するための条件はハミルトン閉路の条件と同様の規則性があることが知られており，同じくハミルトン閉路の一般化の概念である「最長閉路の長さ」と「relative length という不変量」に対しても，同様の規則性が成立するのではないかと予想される．また，これらの閉路の研究はハミルトン閉路の研究に役立つことが知られている．特に，「relative length」は，そのグラフがハミルトニアンである（ハミルトン閉路が存在する）状態からどのくらい離れているかを測る尺度であり，その大きさで場合分けを行うことで，簡明な証明方法を得られると考えられる．

そこで，これらの閉路問題を同時に考えることで統一的な証明手法を確立し，どの閉路問題において代表者らの予想した規則性があるのかを調べるとともに，５頂点以上の次数和に関しても規則性があるのか調べようと考えた．

２．研究の目的

本研究の目的は，上で述べたように，閉路の存在を保証するための不変量の関係式にどのような規則性が存在するのか，もしくは，存在しないのか，その有無は何に起因しているのかを調べることである．具体的には次の２つを中心に据えた．

(1) 「任意の最長閉路が支配閉路である」ための条件の規則性を調査する．そして，さらに，「ハミルトン閉路が存在する」状態と「任意の最長閉路が支配閉路である」状態を一般化し，数値化したものである relative length に対する条件に関する研究を行う．relative length の研究は発展途上で，証明手法が場当たり的で確立されていない．特に，relative length の大きいグラフに対する証明方法はほとんど知られていない．そのようなグラフに対しても対応できる証明手法を模索する．上で述べたように，この研究はハミルトン閉路の問題を幾つかの場合に分けて考えるのに役立つと考える．

(2) 上で述べたように，ハミルトン閉路の一般化の概念である「指定された頂点を通る閉路」はハミルトン閉路と同様な規則性があることがわかっている．しかし，同じくハミルトン閉路の一般化の概念である「最長閉路の長さ」に関しては，代表者らが予想している規則性に基づいた２頂点次数和と４頂点次数和に関する関係式が成立するのかわかっていない．そこで，これらの２つの問題の解決を図る．ここでも，relative length の大きさによる場合分けは非常に重要になってくると考える．

３．研究の方法

(1) 代表者と津垣正男氏と小関健太氏との共同研究で得られた relative length に対する４頂点次数和に関する研究で得られた証明手法と，それとは別に代表者が単独で研究した「任意の最長閉路が支配閉路である」ための４頂点次数和に関する研究で得られた証明手法を組み合わせることで relative length に関する４頂点次数和と位数と連結度の関係式を得ることを試みた．このとき，場当たり的な証明方法をとらず，できるだけ汎用性の高い証明方法を模索することで，５頂点以上の次数和に関する問題に対応できるようにした．

(2) 代表者は最長閉路の長さを３頂点次数和と連結度で評価する研究を行った際，任意の最長閉路が支配閉路であるかそうでないかで場合分けを行った．４頂点次数和で評価する研究に関して，同様の場合分けを考えた．また，relative length が大きさによる場合分けも併用して考えた．代表者は最近，小関健太氏との共同研究において，relative length の大きいグラフの最長閉路の長さを３頂点次数和で評価することに成功した．しかし，証明方法は３頂点に特化したものであり， その方法をそのままの形では４頂点の場合に模倣することはできない．そこで，こ

れまでの次数和条件に関する証明の精査が必要であると考え，閉路だけでなく，最大次数が制限された全域木など，ある性質をもった全域木が存在するための次数和条件も含めて調査を行った.

４．研究成果

大きく分けると次の４つの結果を得た.

(1) relative length が１以下であるための４頂点次数和と位数と連結度の関係式を得た．このことで，relative length が１以下であるための条件もハミルトン閉路と同様な規則性があることがわかった．さらに relative length が０であることとハミルトン閉路が存在することは同値であり，これまで得られている relative length に関する結果を比較することで， relative length がある定数以下になるための条件にも，その定数の値に関連した規則性があると予想できる.

(2) ２頂点次数和に関して調査した結果，最長閉路はハミルトン閉路や指定点を通る閉路と同様の規則性が見られないことがわかった．しかし，代表者は 4 頂点以上に関しては規則性があるのではないかと考え，津垣正男氏と千葉周也氏と共同研究を行った結果，最長閉路の長さを３頂点次数和と連結度で評価する時は２つの場合分けをしたが，４頂点次数和の時は，支配閉路の一般化を考え，それを用いて，３つの場合分けをする必要があることがわかった．その１つの場合に関しては完全解決した．もう１つの場合に関してはある条件を付加したもとでの解決した．残り１つの場合に関しては未解決である.

(3) (2)の４頂点次数和の問題に対する３つの場合分けのうち，２つの場合の完全解決に至らなかった原因として，ブロック木と次数和に関連した研究があまり行われていないことがあった．そこで，その研究の一環として，２部グラフのハミルトン閉路，指定点を通る閉路や最長閉路の次数和条件に関する研究を行った．その結果，これらの次数和条件が一般のグラフと異なり類似性を持たないこともわかった．　これらの研究は岡村治子氏との共同研究と津垣正男氏と千葉周也氏と藤澤潤氏との共同研究である.

(4) 完全解決に至らなかったもう１つの原因として，次数和条件に関する証明手法に関する研究が不足していることがあった．そこで，代表者は小関氏と，木構造に関する次数和条件を調査し，それを一部としたサーヴェイ論文を発表し，それに関連して全域木に関する論文も執筆した．さらに，Aung Kyaw 氏，加納幹雄氏，松田晴英氏，小関健太氏，斎藤明氏と共同研究を行い，クローフリーグラフにおける葉数を制限した全域木が存在するための次数和条件を得た.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）

① A. Kyaw, M. Kano, H. Matsuda, K. Ozeki, A. Saito and <u>T. Yamashita</u>, Spanning trees with a bounded number of leaves in a claw-free graph, Ars Combin. 掲載決定.

② K. Ozeki and <u>T. Yamashita</u>, Spanning trees−A survey, Graphs Combin. 27 (1), 1-26, 2011, 査読有.

③ J. Fujisawa, H. Matsumura and <u>T. Yamashita</u>, Degree Bounded Spanning Trees, Graphs Combin. 26 (5), 695-720, 2010, 査読有.

④ K. Ozeki and <u>T. Yamashita</u>, A spanning tree with high degree vertices, Graphs Combin.26 (4), 591-596, 2010, 査読有.

⑤ R. Matsubara, M. Tsugaki and <u>T. Yamashita</u>, A neighborhood and degree condition for panconnectivity, Austras. J. Combin. 47, 3-10, 2010, 査読有.

⑥ <u>T. Yamashita</u>, A degree sum condition with connectivity for relative length of longest paths and cycles, Discrete Math. 309 (23-24), 6503-6507, 2009, 査読有.

⑦ K. Ozeki, M. Tsugaki and <u>T. Yamashita</u>, On relative length of longest paths and cycles, J. Graph Theory 62 (3), 279-291, 2009, 査読有.

⑧ M. Tsugaki and <u>T. Yamashita</u>, Dominating cycles in graphs with high connectivity, Ars Combin. 91 113-121, 2009, 査読有.

〔学会発表〕（計７件）

① <u>T. Yamashita</u>, Cycles in unbalanced bipartite graphs, 3rd Pacific Workshop on Discrete Mathematics, Tokai University, 2010 年 12 月 9 日.

② <u>山下登茂紀</u>, Longest cycles in bipartite graphs, 離散数学とその応用研究集会，高知大学，2010 年 7 月 31 日.

③ T. Yamashita, Degree sum conditions for cyclability in bipartite graphs, 8th French Combinatorial Conference, Universite Paris Sud, 2010 年 6 月 29 日.

④ 山下登茂紀, Hamiltonicity and cyclability in bipartite graphs, 日本数学会 2010 年度春季総合分科会, 慶應義塾大学, 2010 年 3 月 24 日.

⑤ 山下登茂紀, 2部グラフにおける指定された頂点を通るサイクル, 岡村治子先生退職記念研究集会, 甲南大学, 2010年3月7日.

⑥ 山下登茂紀, Degree sum conditions for cyclablity in bipartite graphs, 離散数学とその応用研究集会, 茨城大学, 2009 年 8 月 9 日.

⑦ T. Yamashita, A degree sum condition with connectivity for relative length of longest paths and cycles, 22nd British Combinatorial Conference, University of St Andrews, 2009年7月6日.

６．研究組織

(1)研究代表者

山下　登茂紀（YAMASHITA TOMOKI）

北里大学・一般教育部・講師

研究者番号：10410458

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし