様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年３月３１日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2009～2011
課題番号：２１７４００８２
研究課題名（和文）　交差に着目した経路問題の多項式時間で解けるクラス

研究課題名（英文）　Special cases of routing problems and their crossings

研究代表者
小田 芳彰（ODA　YOSHIAKI）
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：90325043

研究成果の概要（和文）：
巡回セールスマン問題は NP 困難に属することで知られる有名な問題の１つである．本研究では，この問題とその一般化である車両配送問題および複数の倉庫を持つ車両配送問題について，特に「交差」の条件に着目して取り組み，これらの問題に対する多項式時間で解けるクラスに関していくつかの結果を得た．また，平面上の n 点凸状配置に対するハミルトン閉路のフリップによる「交差」の解消に関する問題およびそれに類似する問題についても結果を得た．

研究成果の概要（英文）：
The Traveling Salesman Problem is one of the most famous NP-hard problems. In this work, we studied polynomial time solvable cases for the problem and its extended problems; the Vehicle Routing Problem and the Multi-Depot VRP. Especially, we focused on "crossings" for those cases. Also, we studied a problem to obtain a non-crossing Hamiltonian cycle by repeating "flip" operations and analogous problems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般
キーワード：離散数学・組合せ論・巡回セールスマン問題・アルゴリズム・計算量理論

１．研究開始当初の背景

巡回セールスマン問題(The Traveling Salesman Problem, 以下 TSP) とは与えられた複数の都市をすべて１回ずつ通り，出発点に戻ってくるような最短経路を求める問題である．この問題は NP 困難のクラスに属し，都市数が増えたとき実用的な時間（多項式時間）で最短経路（最適解）を求めるのは不可能と予想される代表例になっている．そこで，実社会での応用の観点から，実用的な時間で最適解に近い解を求めようとする近似解法の研究がさかんに行われてきた．その一方，理論的な観点からはどのような性質があれば，TSP の最適解が多項式時間で得られるかについて研究されてきた．TSP の多項式時間で解けるクラスの研究は 1950 年代から

始まり，Monge 性をみたすクラスなどのようにピラミッド型巡回路が最適解になる条件が示されてきた．この研究では，各頂点間の距離に対してある制約条件を与えた問題に対し，以下の２つのことを示すことが本質的である．

(i) 最適解の構造がある程度確定することを証明する．すなわち，最適解が解集合のある部分集合に含まれることを示す．

(ii) その部分集合の中の最適解を求める多項式時間アルゴリズムを構成する．

本研究代表者は，これまで代表者らが考案した緩和したピラミッド型巡回路を用いたTSP の多項式時間で解けるクラスについて取り組んできた．上記の部分集合はピラミッド型巡回路あるいはそれを緩和した巡回路の集合に対応している．さらに，TSP の拡張となる車両配送問題(The Vehicle Routing Problem，以下 VRP）の多項式時間で解けるクラスについても研究を行ってきた．TSP と同じように各頂点間の距離に制約条件を与えた場合，VRP と TSP の間にどの程度同じ性質を保存できるかあるいは異なる性質があるかについて取り組んできたが，Monge 性など，ある程度強い条件を課した場合に同様の性質が成り立つことがわかっていたのみであった．
TSP が多項式時間で解ける条件として知られている Monge 性，Strong Demidenko 条件，Van der Veen 条件を VRP に対して仮定すると，いずれの場合も最適解の構造はピラミッド型巡回路と似た性質を持つことが証明できていた．その結果，VRP の最適解も多項式時間で求められることがわかった．
これらの定理を得る際に，これら 3 つの条件のうち，Monge 性および Strong Demidenko 条件と Van der Veen 条件の間に差があることがわかった．ここで，いずれの条件も，各 n 都市に 1 から n の番号がふられたとき，この番号づけの下での各都市間の距離に関する不等式条件である．Monge 性や Strong Demidenko 条件は「交差」を解消する不等式条件を含んでいるため，VRP の解が TSP と同様の挙動を示すことがわかった．しかし，Van der Veen 条件は「交差」を解消する条件を含んでおらず，そのために各頂点へふった番号の偶奇性が大きく影響し，最適解の構造の把握が困難であった．このように，「交差」を解消する不等式条件を含んでいるか否かが各条件に対する重要な因子であると考え，「交差」に着目して，研究に取り組もうと考えた．

また，後述する複数の倉庫を持つ車両配送問題 (The Multi-Depot Vehicle Routing Problem，以下 MDVRP）は近似解法に関する研究はなされているものの，多項式時間で解けるクラスについては研究されていなかった．

２．研究の目的

本研究課題では，多項式時間で解くことが難しいと予想されている経路問題 (TSP およびその一般化である VRP，MDVRP）に取り組む．特に，

1. 「交差」に着目した経路問題の多項式時間で解けるクラス

2. 平面上の n 点凸状配置に対するハミルトン閉路のフリップによる「交差」の解消に関する理論と計算機実験の両面からの研究

の２つに取り組み，これらの結果をふまえて，新たに多項式時間で解ける新しいクラスを得ることを目的とする．

３．研究の方法

本研究を行うにあたって，取った方法のうち特筆すべき３点は下記のとおりである．

(1) TSP の多項式時間で解けるクラスとして既に知られている条件を証明まで含めて網羅的に調べ直した．そこで，「交差」の条件がどの程度使われているかを把握した上で，VRP や MDVRP での証明に取り組んだ．

(2) 当該分野の研究者と適宜連絡を取り合うことで情報交換に努めた．特に TSP の多項式時間で解けるクラスの分野で著名な研究者の１人であるイギリスウォーリック大学の Deineko 氏には本研究課題開始直前に訪問した．

(3) 必要に応じて，コンピュータを使った計算機実験を行った．いずれの研究も，離散的な構造を対象にしているため，問題のサイズが小さいところに対し，コンピュータを使うことで，挙動を見ることができ，一般化への手助けになった．

４．研究成果

(1) 複数の倉庫を持つ車両配送問題(MDVRP)の多項式時間で解けるクラスに関する結果

VRP とは，1 つのデポ（倉庫）から p 台のトラックが出発し,それぞれ指定された n 都市を分担して回ってデポに戻ってくるとき，総移動距離が最短になるような各トラックの配送経路を求める問題である．p = 1 のときは TSP と同じ問題になる．さらに，デポの数を t 個にし，p 台のトラックがいずれかのデポを出発し，それぞれ指定された n 都市を分担して回って，出発したデポに戻ってくるときの最短配送経路を求める問題を MDVRP という．

まず，１つのデポの場合と同様に，MDVRP においてピラミッド型の経路の中の最適解を求める多項式時間アルゴリズムを考案した．さらに，Monge 性，Strong Demidenko 条件を仮定した場合，MDVRP の最適解の中にピラミッド型のものが存在することを証明した．これらの結果を組み合わせることにより，Monge 性，Strong Demidenko 条件が MDVRP においても多項式時間で解けるクラスを与えていることがわかった．さらに，Monge 性の場合は，任意のインスタンス（問題例）に対し，ある最適解の各連結成分が頂点の番号づけに関して区間をなす（頂点の番号が連続する）ことも示した．一方，Strong Demidenko 条件の場合は，どの最適解も区間をなさない連結成分が生じてしまう例を構成することができた．以上から，これらの条件は VRP において最適解のもつ性質に違いがあることを明確にできた．これらの結果については，ハワイで行われた国際会議にて発表を行った．

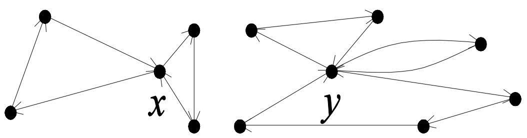

図１　MDVRP の解のイメージ（x, y がデポ，トラックが５台）

(2) 車両配送問題（VRP）の多項式時間で解けるクラスに関する結果

TSP の多項式時間で解ける条件として知られているものの１つに Demidenko 条件がある．この条件を TSP に課した場合はピラミッド型巡回路が最適解になることが知られているが，本研究課題開始直前に，この条件を課した VRP において最適解がピラミッド型にはならない問題例を見つけることができていた．

本研究において，Demidenko 条件を満たす場合でも，Monge 性などの条件と同様に，多項式時間で解けることを示した．ここで，最適解のうち，ピラミッド型になっていない閉路はデポの周辺以外には生じないことを示すことができ，解決することができた．しかし，デポの周辺でこうした構造が生じてしまう場合についてはまだよくわかっていないことが多く，この現象を含め，Demidenko 条件の持つ性質をさらに解明することは今後の課題である．

なお，TSP と VRP に対する多項式時間で解けるクラスの差異点および類似点を中心に日本数学会の特別講演で発表した．

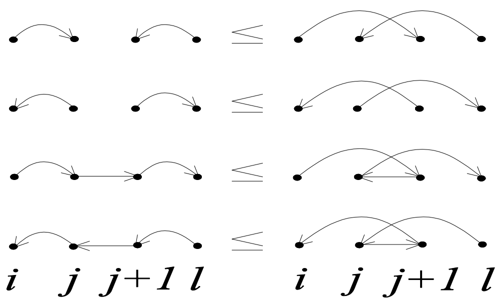

図 2　Demidenko 条件（任意の 4 頂点 i, j, j+1, l に対し，i≦j≦j+1≦l の下での条件）

(3) 平面上に凸状配置された n 頂点のハミルトン閉路に関する結果

本研究課題開始前から，平面上のハミルトン閉路が含む交差を解消する問題についても取り組んできた．一般に平面上のハミルトン閉路は辺の交差を含んでいる．この交差する 2 辺を別の 2 辺に交換する操作をフリップとよび，交差のないハミルトン閉路を得るまでに少なくとも何回のフリップが必要かという問題を考えてきた．Englert らは一般の TSP において都市数に関して指数回必要な例を与えたが，研究代表者らは，凸状に配置された n 点に対するハミルトン閉路を考え，O(n)回で十分であることを既に示していた（Oda and Watanabe, 2008）．

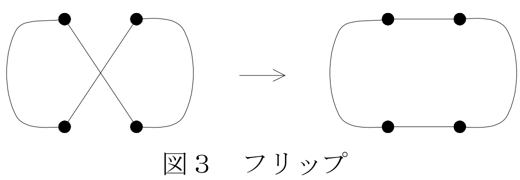

図３　フリップ

本研究では，交差解消に必要なフリップの最大回数 f(n)の計算機による実験を行った．本研究課題を開始する前に n≦10 までの結果を得ていたが，探索の方法を改良することにより，大幅に計算時間を減らすことができ，

n=14 まで計算することができた．ここまでの結果では，当初の予想 f(n)=n−2 は正しいことがわかった．集合{1,2,…，n}上の置換に対し，先頭を含む部分列の反転で整列する問題はパンケーキ問題としてよく知られているが，この反転の最大回数は n の係数が 1 より大きくなることがわかっているものの，正確な値の決定は未解決である(Asai et al., 2006)．このパンケーキ問題のような挙動を示す可能性もあるが，15 頂点以上について同様の手法で計算機実験を行うことは難しいと思われる．(おそらく，パンケーキ問題のように，並列計算等の道具が必要であると考えている．）この f(n)=n−2 の予想の解決に向けて，最初に与えられるハミルトン閉路の形状を制限した場合などについて今後も取り組んでいきたい．

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f(n)	3	3	5	6	7	8	9	10	11	12

表１　n が小さいときの f(n)の値（得られた結果)

(4) 順列に関する均等分割とその応用に関する結果

集合{1,2,…,n}上の任意の順列に対し，適切な１箇所に区切りを入れ，必要ならばその両側の適切な２つの値を交換することにより，区切りの両側の和をほぼ均等（差が１以下）にできることを示した．これは (3) におけるフリップに対応する操作を２つの要素の交換と考えれば，この操作により安定した構造に変形できるという点で似ている問題であり，興味を持っている．

区切りを入れるだけでは差が２以上になってしまう例も見つけており，均等分割には２つの値の交換が本質的であることも示した．また，この結果を平面上の n 点配置に関する問題に応用し，離散幾何における均等分割に関する定理を示すことができた．さらに，この定理の最善性を示す例を凸状配置で見つけることもできた．この例はコンピュータを使うことによって得られたものである．n が 14 以下では存在しないが，n=15 のときに 12 個，n=16 のときに 37 個存在し，n=17 のときには存在しないことがわかった．n=15,16 のときに得られた例のもつ特徴は未解明の部分が多く，この例の無限系列を見つけることは今後の課題である．

(5) 閉曲面上に埋め込まれたグラフの三角形分割に関する結果

種数 3 の向きづけ不可能閉曲面上の三角形分割のうち K_6-minor をもたないものの特徴づけに関する結果を得た．ここでは，Sulanke が求めた既約三角形分割のリストを用いて計算機による探索を行った．

最後に，経路問題における多項式時間で解けるクラスについては，ウォーリック大学の Deineko 氏と Monge 性を緩和した条件に関する研究を開始している．最適解を保証するためのさまざまな「逆走」のタイプを見つけることはできたが，多項式時間で解を得られるかどうかは証明できておらず，継続して研究を行っていきたいと考えている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① R. Mukae, A. Nakamoto, Y. Oda, Y. Suzuki, K_6-minors in triangulations on the nonorientable surface of genus 3, Graphs and Combinatorics, 査読有, 26, 2010, pp.559-570.

② A. Nakamoto, Y. Oda and K. Ota, 3-trees with few vertices of degree 3 in circuit graphs, Discrete Mathematics, 査読有, 309, 2009, pp.666-672.

〔学会発表〕（計５件）

① 小田芳彰, 反転に関するいくつかの問題, 関西グラフ理論研究集会，2012.3.7, 加計国際学術交流センター．

② 小田芳彰，経路問題と計算量-経路問題の多項式時間で解けるクラス，離散数理構造とその応用，2011.11.19，名古屋大学多元数理科学研究科．

③ 小田芳彰，複数の倉庫がある車両配送問題の多項式時間で解けるクラス，応用数学合同研究集会, 2010.12.18, 龍谷大学．

④ Yoshiaki Oda, Special cases of the multi-depot vehicle routing problem, the 3rd Pacific Workshop on Discrete Mathematics, 2010.12.9, Tokai University Pacific Center, Hawaii.

⑤ 小田芳彰，経路問題と離散数学，日本数学会秋季総合分科会，特別講演，大阪大学，2009.924.

〔その他〕

ホームページ等

http://www.math.keio.ac.jp/~oda/

６．研究組織

(1)研究代表者

小田 芳彰（ODA YOSHIAKI）
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：90325043

(2)研究分担者

該当なし

(3)連携研究者

該当なし