様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　２４年　５月１０日現在

機関番号：13101
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2009～2011
課題番号：21740088
研究課題名（和文）　代数的不変量に着目した閉曲面上のグラフの変形に関する研究

研究課題名（英文）　A study on local deformations for graphs on surfaces focusing on algebraic invariants
研究代表者
鈴木　有祐（SUZUKI YUSUKE）
新潟大学・自然科学系・准教授
研究者番号：10390402

研究成果の概要（和文）：一般の三角形分割の対角変形に関しては過去に十分な結果があるが，偶三角形分割，四角形分割に対し，その正則性を保存するような局所変形を考えると問題は突然複雑化してしまう．（閉曲面の代数的不変量との関連が重要になってくる.）この近辺の問題に関していくらかの結果を得ることに成功した．特に，任意の２つの射影平面上の k-既約四角形分割が Y-rotation と呼ばれる局所変形によって移り合うことを証明した．

研究成果の概要（英文）：Although there are many results on diagonal flips for triangulations on surfaces, it becomes difficult if we consider a local deformation for even triangulations or quadrangulations which preserves the regularity of those graphs (algebraic invariants for graphs on surfaces should be focused in this case). We considered problems around here and could obtain some results on them. Especially, we proved that any two k-minimal quadrangulations on the projective plane can be transformed into each other by a sequence of Y-rotations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１０年度	700,000	210,000	910,000
２０１１年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学，数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：偶三角形分割，閉曲面，三角形分割，四角形分割，モノドロミー，局所変形，グラフ

１．研究開始当初の背景

1930 年代に Wagner は「頂点数の等しい球面の三角形分割は辺の対角変形を繰り返すことにより互いに移り合う」という命題を証明した．この結果は，閉曲面上のグラフの局所変形理論の出発点と位置づけられ，これまで国内外の多くの研究者によって様々な方向への発展を遂げてきた．（例えば，一般の閉曲面上の対角変形に関する結果や，対角変形の回数を見積もるというような研究がおこなわれている．前者に関しては，根上氏による以下の結果が一般論として存在する：任

意の閉曲面 F に対して，次のような自然 $N=N(F)$が存在する．$|V(G)|=|V(G')|\geqq N$ となる F 上の三角形分割 G, G' は対角変形によって互いに移り合う．なお，種数の低いいくつかの閉曲面（球面，射影平面，トーラス，クラインボトル）に関しては具体的な N の値が得られている．）後者に関しては，森氏等の得た球面上の n 頂点三角形分割に対する対角変形の回数の上界 $6n-30$ が，現在ベストなものとなっている．）

また，三角形分割の中でも特別なクラスである偶三角形分割（各頂点の次数が偶数）の研究は 2000 年以降 Hutchinson らの研究に始まった後急速な進歩を見せている．その流れの中で，我々は偶三角形分割の偶次数性を保存する局所変形として，N-変形を定義した（図 1 参照）．この変形に関して研究を進めて行くうちに，既存の三角形分割の結果やその証明方法とは異なり，代数トポロジー的不変量（S_3-モノドロミーと呼ばれる）が深く関連しいることがわかってきた．

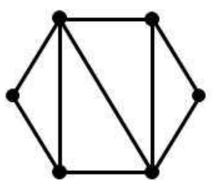

図１ N-変形

２．研究の目的

本研究は主に偶三角形分割の N-変形を通して，局所変形理論と閉曲面上のグラフの代数トポロジー的不変量の関連を調べることに主眼を置いた．また，四角形分割などのクラスに関してもある種の変形を導入し，閉曲面上のグラフの局所変形理論に新しいタイプの結果をもたらすことを目的とした．その他，局所変形の回数を見積もることにより，応用分野（計算幾何学等）方面への拡張も期待した．

３．研究の方法

これまでの位相幾何学的グラフ理論では，「頂点数が十分大きい」等の条件を与えることにより，閉曲面に``密"に埋め込まれているグラフを扱うことが多かった．（局所的には球面上の議論と類似したものとなる．）しかし近年では，閉曲面上に``粗"に埋め込まれたグラフの構造が問題になることが多い．N-変形に関する研究では``粗"に埋め込まれたグラフの存在が特に重要であり，これらの議論を行う際にはまず種数の低い閉曲面（射影平面，トーラス）に着目して考察を行った．また，射影平面の四角形分割に Y-rotation という局所変形を導入し（図２参照），どのようなグラフがこの変形により互いに移り合うかを考察した．この研究は，射影平面上の minor minimal k-representative グラフに関する Randby の結果の双対としてとらえることが可能である．得られた結果は既存の Randby の結果を完全に含むものとなった．

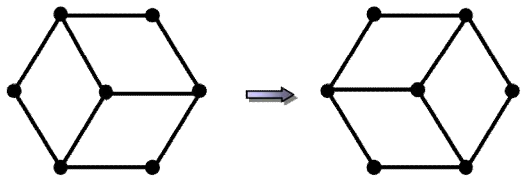

図２ Y-rotation

４．研究成果

得られた主な結果は以下の３つである．

(1) 3-染色的な偶三角形分割から１つの部集合を除いたものは閉曲面の偶角形分割になるが，もとの偶三角形分割における N-変形は，得られた偶角形分割の diagonal slide という操作に対応している．その特別な場合である球面の四角形分割に対して，２つの四角形分割が diagonal slide によって移り合うための回数が，頂点数に対して線形な式によって抑えられることを証明した．

(2) 四角形分割の次数３の頂点に対して，Y-rotation という局所変形を定義した．（双対を考えると，一般の埋め込みの $Y\Delta$-変形および ΔY-変形（図３参照）に対応している．）特に，射影平面上の k-既約四角形分割に着目し，以下の定理を証明した．

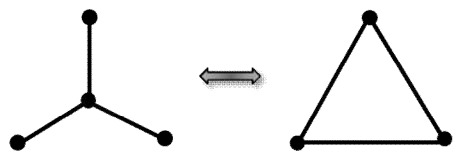

図３ $Y\Delta$-, ΔY-変形

定理１ 任意の２つの射影平面上の k-既約四角形分割は Y-rotation を繰り返すことにより互いに移り合う．

上記の定理の系として，3 以上の任意の自然数 k に対して，射影平面上の k-既約四角形分割の頂点数が一定であるという事実も得られる．（Y-rotation がグラフの頂点数を変えない局所変形であるため．）さらに，k-既約四角形分割の双対の 4-正則グラフの構造を見ることにより，k-既約四角形分割の構成方法を理解することができた．上述のように，この結果は射影平面上の minor minimal k-representative グラフに対する Randby の

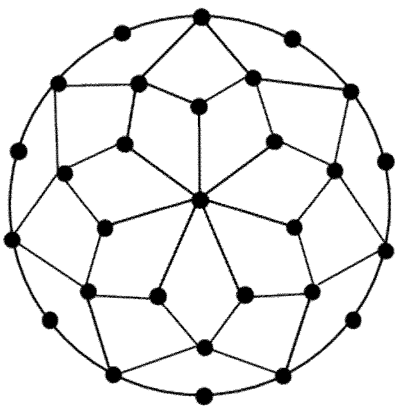

図３　射影平面上の 7-既約四角形分割

結果(1995, Journal of graph theory)を完全に含んだものになっている．今後の研究として，一般の閉曲面上の四角形分割に対する Y-rotation の議論を行っていきたい．実際，（双対 4-正則グラフに着目した）向き付け可能な閉曲面に限った Schrijver(1992)による結果が存在するが，向き付け不可能な閉曲面に関しては，現在何もわかっていない．射影平面の結果と同様，よりシンプルな議論によって Shcrijver の定理を証明しなおすことができれば，一般の閉曲面に対する結果に拡張できるかもしれない．

(3) 射影平面上の四角形分割の構造を研究する過程において，多色 3-彩色可能な四角形分割を完全に特徴づけることに成功した．（Gを閉曲面上に埋め込まれたグラフとする．$S \subset V(G)$が Gの面監視集合とは，Gのどの面もある $s \in S$をその境界上に含むものと定義する．さらに，Gの頂点彩色 c: $V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$が多色 k－彩色であるというのは，cのどの color class も Gの面監視集合になっていること，と定義する．）与えられた四角形分割 G の双対の 4-正則グラフは射影平面上の閉曲線に分割することができる．そのような閉曲線を G の直進面閉歩道と呼ぶことにすると，その特徴づけは以下の定理として述べることができる．

定理２　G を射影平面上の四角形分割とする．Gが多色 3-彩色可能であることの必要十分条件は任意の G の直進面閉歩道が射影平面上で可縮であることである．

この結果は(2)の結果との関連も非常に深く今後の研究の進展が期待される．また，この問題は有名な美術館問題(「n 角形の美術館には何台の監視カメラが必要か？」) の拡張問題になっている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計１１件）

① A. Nakamoto and Y. Suzuki, Y-rotation in k-minimal quadrangulations on the projective plane, *J. Graph Theory* **69** (2012), 301－313. （査読有り）
② Y. Suzuki, Re-embedding structures of 4-connected projective planar graphs, *J. Graph Theory* **68** (2011), 213－228. （査読有り）
③ K. Kawarabayashi, S. Negami, M. Plummer, and Y. Suzuki, The 2-extendability of 5-connected graphs on surfaces with large （査読有り） representativity, *J. Combin. Theory, Ser. B.*, **101** (2011), 206－213.
④ K. Ishiguro, S. Negami, Y. Suzuki and K. Yamamoto, No optimal 1-planar graph triangulates the non-orientable closed surface of genus 4, *Congressus Numernatium* **202** (2010), 25－31. （査読有り）
⑤ Y. Suzuki, Re-embeddings of maximum 1-planar graphs, *SIAM J. Discrete Math.*, **24** (2010), 1527－1540. （査読有り）
⑥ S. Negami and Y. Suzuki, The 2-extendability of 5-connected graphs on the Klein bottle, *Discrete Math.*, **310** (2010), 2510－2518. （査読有り）
⑦ R. Mukae, A. Nakamoto, Y. Oda and Y. Suzuki, K_6-Minors in triangulations on the nonorientable surface of genus 3, *Graphs Combin.*, **26** (2010), 559－570. （査読有り）
⑧ I. Mizukai, S. Negami and Y. Suzuki, The 2-extendability of graphs on the projective plane, the torus and the Klein bottle, *Graphs Combin.*, **26** (2010), 549－557. （査読有り）
⑨ A. Nakamoto and Y. Suzuki, Diagonal slides and diagonal rotations in quadrangulations on the sphere, *Yokohama Math. J.*, **55** (2010), 105－112. （査読有り）
⑩ Y. Suzuki, Optimal 1-planar graphs which triangulate other surfaces, *Discrete Math.*, **310** (2010), 6－11. （査読有り）
⑪ K. Kawarabayashi, A. Nakamoto and Y. Suzuki, N-Flips in even triangulations on surfaces, *J. Combin. Theory, Ser. B.*, **99** (2009), 229－246. （査読有り）

〔学会発表〕（計１２件）

① 鈴木　有祐，The number of edges of maximal 1-planar, graphs and embeddings, 渡辺守先生ご退職記念関西グラフ理論研究集会，加計国際学術交流センター，2012 年 3 月 8 日．
② 鈴木　有祐，Re-embeddings of optimal 1-embeddings of the projective plane, 応用数学合同研究集会，龍谷大学，2011 年 12 月 17 日．
③ 鈴木　有祐，射影平面上の optimal 1-embedding の再埋蔵について，離散数学とその応用研究集会 2011, 奈良県文化会館，2011 年 8 月 2 日．
④ 鈴木　有祐, Optimal 1-embedding の再埋蔵列挙プログラムについて, 第 22 回位相幾何学的グラフ理論研究集会，横浜国立大学，2010 年 11 月 13 日．
⑤ 鈴木　有祐，On properties of maximal 1-planar graphs, 日本数学会・秋季総合分科会, 名古屋大学, 2010 年 9 月 22 日．
⑥ 鈴木　有祐，Generating polyhedral quadrangulations of the projective plane, Sixth Cracow Conference on Graph theory ``ZGORZELISKO'10'', Hotel Tatry, Poland, 2010 年 9 月 16 日．
⑦ 鈴木　有祐，Generating polyhedral quadrangulations of the projective plane, 離散数学とその応用研究集会 2010，高知大学朝倉キャンパス，2010 年 7 月 31 日．
⑧ 鈴木　有祐，On properties of maximal 1-planar graphs, 岡村治子先生退職記念研究集会，甲南大学，2010 年 3 月 6 日．
⑨ 鈴木　有祐，Re-embeddings of maximum 1-planar graphs, 33rd Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, The University of Newcastle, 2009 年 12 月 10 日．
⑩ 鈴木　有祐，Maximum 1-planar graph の再埋蔵について，第21回位相幾何学的グラフ理論研究集会，横浜国立大学，2009 年 11 月 26 日．
⑪ 鈴木　有祐，Generation of quadrangulations with some conditions on surfaces, 離散幾何とその応用研究集会 2009, 茨城大学工学部日立キャンパス, 2009 年 8 月 7 日．
⑫ 鈴木　有祐，Generation of quadrangulations on surfaces, 離散幾何とグラフ理論 1 日研究集会，東海大学教育開発研究所, 2009 年 5 月 23 日．

６．研究組織

(1)研究代表者

鈴木　有祐（SUZUKI YUSUKE）
新潟大学・自然科学系・准教授
研究者番号：10390402

(2)研究分担者　なし

(3)連携研究者　なし