

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 6 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21740092

研究課題名（和文）非局所性を持つ非線形偏微分方程式の研究

研究課題名（英文）Analysis of nonlinear partial differential equations with nonlocal property

研究代表者

三浦 英之（MIURA HIDEYUKI）

大阪大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：20431497

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、非局所性を伴う非線形偏微分方程式の数理解析的研究を行った。特に、非圧縮粘性流体を記述する非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の正則性や漸近挙動およびある種の分数拡散方程式の基本解の性質等を研究し、新しい知見が得られた。また、これらの研究の中で幾つかの解析手法を提案した。これらの手法は今後の研究においての応用が期待される。

研究成果の概要（英文）：In this project, we considered nonlinear partial differential equations with nonlocal property. We obtained some results on the regularity and the asymptotic behavior of the incompressible Navier-Stokes flows and the property of the fundamental solutions for certain fractional diffusion equations. Besides these results, we introduced some methods for the analysis of the nonlocal partial differential equations. We expect these methods can be applied for future research.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：分数拡散方程式，楕円型境界値問題，特異点除去可能性，外部問題，Navier-Stokes 方程式，渦度方向，Landau 解

1. 研究開始当初の背景

本研究では、非局所的性質を伴う非線形偏微分方程式の数学解析を行った。非局所性をもつ方程式の一例として非圧縮 Navier-Stokes 方程式がある。同方程式では非圧縮性の仮定により、圧力項が(形式的に

は)速度場を含む積分項で与えられるため、解のある点での情報は一瞬にして全ての点での解の挙動に影響を与える。このように非局所性をもつ方程式を考える際は、ある近傍での解の局所的な挙動を調べるためにも解の大域的性質を調べる必要がある。とり

わけ非線形性を持つ方程式を考える場合、非局所性と非線形性という二つの困難を同時に制御する必要がある。このような方程式に対しても、偏微分方程式の一般論によって、弱解の存在等の基本的な性質を調べることはできるが、正則性や漸近挙動等のより詳しい性質を調べる際には非局所性を考慮した解析が必要となる。研究代表者はこれまでに、非圧縮 Navier-Stokes 方程式の研究の他、(分数拡散項をもつ) 準地衡近似方程式の解の一意存在の研究等を行ってきたが、その解析手法は偏微分方程式の古典理論の範疇に留まるものであった。近年、地球流体力学や数理ファイナンス等の分野においても非局所性をもつ方程式の重要性が明らかになり、より多くの研究が行われるようになってきている。そのような状況を踏まえ、本研究では非線形偏微分方程式の非局所性に焦点をあてて、数理解析的な研究に取り組んだ。

2. 研究の目的

本研究では非局所性をもつ方程式の中でも特に、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式および、上述の準地衡近似方程式の線形化方程式である分数拡散方程式の研究を行った。以下、それぞれの問題における研究目的を述べる。

(1) 非圧縮 Navier-Stokes 方程式における解の非爆発条件

非圧縮 Navier-Stokes 方程式の(エネルギー一有限の)弱解の時間大域的な滑らかさの問題は、現在までのところ未解決である。この問題に対する一つのアプローチとして、ある点で解が爆発しないための十分条件を考察する爆発点除去可能性の研究があり、大山, Serrin 等の研究に始まり多くの研究が行われている。近年、自己相似解の爆発レートである type I と呼ばれる仮定の下で爆発可能性を排除できないかという問題が考えられ、

幾つかの興味深い結果が得られている。本研究では渦度方向に対する仮定の下で爆発可能性が排除できないか儀我美一氏(東京大学)と考察を行った。

(2) 非圧縮 Navier-Stokes 方程式の外部問題における解の漸近挙動

本研究に関して、最近 Korolev-Sverak により、無限遠で静止状態に収束するような境界条件において、流れの速くない定常解は無無限遠方で Landau 解と呼ばれる自己相似解に漸近することが示された。無限遠方での挙動については幾つかの結果が知られていたが、具体的な特殊解によって、無限遠方の挙動が特徴付けされることを示したのは彼らの結果が初めてと思われる。一方、非定常外部問題においては、解の安定性など時間無限大での挙動については多くの研究がなされているが、空間無限遠方での挙動の研究はあまり行われていなかった。そこで、研究代表者は Tai-Peng Tsai 氏(British Columbia 大学, カナダ)および Kyungkeun Kang 氏(延世大学, 韓国)と共同で、Korolev-Sverak の結果の類似が非定常問題でも成立しないか考察を行った。

(3) 分数拡散方程式の研究

分数拡散方程式とは拡散項に現れる微分が、通常のラプラシアンや二階楕円型作用素でなく、分数冪のラプラシアンにより与えられる方程式である。以前から、このような方程式の基本解の研究は確率論の研究者により行われてきたが、本研究では、前川泰則氏(神戸大学)と共同で準地衡近似方程式等への応用も視野に、輸送項のある方程式を対象に、輸送項の係数にあたるベクトル場に対し、あまり滑らかさを仮定しない場合の基本解の正則性、各点評価および境界値問題への応用

を考察した.

3. 研究の方法

本研究では, 共同研究者および関連分野の専門家との議論が重要な役割を果たした. そのため, 研究費の多くは出張旅費にあてられた. 主な訪問先は British Columbia 大学, 国立台湾大学, Minnesota 大学, New York 大学, 延世大学校である. 各研究に対する研究手法としては, 偏微分方程式の研究における性質上, 各方程式固有の特性を生かした解析が必要となる. その際, 関数空間論および偏微分方程式論における De Giorgi の blow up 解析, 作用素の半群理論, Nash の iteration, Davies の熱核評価といった解析法を基礎に, 非局所的な性質の困難を克服するために調和解析等を由来とする解析手法が用いられた.

4. 研究成果

研究目的欄で記述した各問題に関して, それぞれ以下のような結果が得られた.

(1) 非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する渦度方向の正則性による非爆発条件

Type I の仮定を満たす非圧縮 Navier-Stokes 方程式の解の非爆発条件の研究においては, 渦度のなす方向場に着目し, これが空間変数に関してある意味で一様連続であれば, その近傍で, 解は爆発しないことを示した(儀我氏との共同研究). これは type I という付加条件付きであるものの, 渦度方向場に対し, Lipschitz 連続性を仮定する Constantin-Fefferman による従来の結果を, 正則性の観点から改良するものとなっている. また今回の証明法は彼らの証明法とは異なり, 渦度方向場の滑らかさと二次元流の関係を利用したものであり, 新しい視点を与えるものとなっている.

(2) 非圧縮 Navier-Stokes 方程式の外部問題における解の漸近挙動

Landau 解による外部問題の解の研究においては, その境界条件が時間周期的かつ或る意味で十分小さければ, 小さい時間周期解は空間無限遠で Landau 解に漸近することが示された. また, そのような時間周期解の安定性を示すこともできた(Kang, Tsai 両氏との共同研究).

(3) 分数拡散方程式の基本解の正則性, 各点評価

輸送項のある分数拡散方程式に対し, 輸送項の係数に現れるベクトル場に対する弱い正則性の仮定の下で, 基本解の存在及びそのヘルダー連続性, Poisson 型の上方各点評価が得られた(前川氏との共同研究). 特にヘルダー連続性の結果から Caffarelli-Vasseur による臨界消散準地衡近似方程式の弱解の正則性定理の別証明が得られた. ここで輸送項のベクトル場に対する仮定は, スケール不変であるという意味で最適のものと思われる.

(4) ある種の楕円型境界値問題の可解性

半空間におけるラプラス方程式の境界値問題の解が(マイナス)ラプラシアン平方根の生成する半群(Poisson 半群)によって与えられることからわかるように, 楕円型境界値問題と分数拡散方程式は関連があることが知られている. 本研究では, 前川氏と共同で, ある種の発散形の楕円型境界値問題の解を輸送項によって摂動された(一階)消散型作用素の生成する半群によって表現することにより, 可解性について考察を行った.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① Giga Yoshikazu; Miura Hideyuki: On vorticity directions near singularities for the Navier-Stokes flows with infinite energy, *Comm. Math. Phys.* 303 (2011), no. 2, 289-300, 10.1007/s00220-011-1197-x.
- ② Miura Hideyuki; Tsai Tai-Peng: Point singularities of 3D stationary Navier-Stokes flows, *J. Math. Fluid Mech.* 14 (2012), no. 1, 33-41, 10.1007/s00021-010-0046-6.
- ③ Kang Kyungkuen; Miura Hideyuki; Tsai Tai-Peng: Asymptotics of small exterior Navier-Stokes flows with non-decaying boundary data, *Comm. Partial Differential Equations* 37 (2012), no. 10, 1717-1753, 10.1080/03605302.2012.708082.
- ④ Maekawa Yasunori; Miura Hideyuki: Upper bounds for fundamental solutions to non-local diffusion equations with divergence free drift, *J. Funct. Anal.* 264 (2013), no. 10, 2245-2268, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2013.02.011>.

[学会発表] (計 5 件)

- ① Miura Hideyuki: Landau solutions for incompressible Navier-Stokes equations and applications. 偏微分方程式論札幌シンポジウム, 北海道大学理学部, 2009 年 8 月 24 日.
- ② 三浦 英之: Vorticity directions near the blow-up time for the 3D Navier-Stokes flows with infinite energy, 微分方程式の総合的研究, 東京大学大学院数理科学研究科, 2009 年 12 月 19 日.
- ③ 三浦 英之: Vorticity directions near the blow-up time for the 3D Navier-Stokes flows with infinite energy, 日本数学会秋季総合分科会, 名古屋大学, 2010 年 9 月 25 日.
- ④ 三浦 英之: 輸送項付き分数階拡散方程式の基本解について, 日本数学会秋季総合分科会, 九州大学, 2012 年 9 月 21 日.
- ⑤ Miura Hideyuki: Asymptotics of small exterior Navier-Stokes flows with non-decaying boundary data,

International Workshop on Mathematical Fluid Mechanics, 早稲田大学, 2012 年 11 月 7 日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三浦英之 (MIURA HIDEYUKI)
大阪大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号: 20431497

