様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年４月２６日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2009 ～ 2011
課題番号：２１７４００９４
研究課題名（和文）複雑な空間構造の解明に適した確率解析の理論展開

研究課題名（英文）Development of stochastic analysis on spaces with anomalous structures

研究代表者
日野　正訓（HINO MASANORI）
京都大学・大学院情報学研究科・准教授
研究者番号：４０３０３８８８

研究成果の概要（和文）：
確率解析の理論が従来想定されていなかったような多様な状況で応用されつつある現状をふまえ，本研究では複雑な空間における構造の解明に適した確率解析の理論展開を行った．具体的には，フラクタル上の拡散過程から定まる次元や距離・空間構造についての研究を行い，新たな知見を得た．また，新古典不等式と呼ばれる不等式についての十数年来の予想を肯定的に解決した．更に，無限次元空間上の関数空間における幾つかの新しい性質を証明した．

研究成果の概要（英文）：
In this research project, we developed theories related to stochastic analysis that were suitable for the study of spaces with anomalous structures, taking applications into consideration. In particular, we obtained some new results on the concepts of dimensions, metrics, and local structures of spaces derived by diffusion processes on fractals. Moreover, we solved the conjecture on the neo-classical inequality, and proved several properties on function spaces on infinite-dimensional state spaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２０１０年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２０１１年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：確率論
科研費の分科・細目：基礎解析学
キーワード：確率解析，Dirichlet 形式，フラクタル，無限次元空間，対称拡散過程

１．研究開始当初の背景

確率解析の理論において，適切な解析データをもとに確率過程を構成し，その性質を調べ

るという問題は，最も基本的なテーマでありこれまで多彩な研究が行われてきた．一つの柱は確率微分方程式の理論であり，微分構造を持つ空間において，ノイズの影響を加味した解析学とでもいうべき広範な応用を持つ強力な理論である．もう一つの柱である，状態空間の構造をほとんど仮定しないで済むDirichlet形式の理論は，近年無限次元空間やフラクタル集合などの複雑な空間の研究が進むにつれ，その有用性がますます認識されるようになってきている．その一方で，確率微分方程式に比べ，Dirichlet形式によるアプローチでは，対応する確率過程のレベルでの定量的構造（標語的にいえばノイズの構造）が一般論として明確にはわかっているとはいえず，系統立った研究が行われてきたとは言い難い面がある．これは，従来念頭に置かれていた多様体などの典型例においては，付随して得られる確率微分方程式による表現を通じて状況が比較的明らかであるため，問題意識として取り上げる必然性がなかったためであると考えられる．ところが近年しばしば研究対象とされる複雑な空間においては事情は明らかではなく，そのメカニズムを明らかにする理論はほとんど確立されていなかった．

２．研究の目的
本研究は，確率解析の理論が，従来想定されていなかったような多様な状況で応用されつつある現状をふまえ，従前ではあまり問題意識に上ってこなかった事項に焦点を当てた，複雑な空間における構造の解明に適した確率解析の理論展開を行うことにより，当該分野と隣接分野との新たな視点からの融合および発展を目的とするものである．特に，以下のような具体的問題を念頭において研究を進める．

(a) 強局所ディリクレ形式に付随する拡散過程の微視的な挙動を明らかにする理論を展開する．
(b) 強局所ディリクレ形式が定義されている状態空間上の測度論的微分幾何学を展開する．
(c) Skorokhod表現では記述できないような反射壁拡散過程の記述法を与える．

以上のような問題意識の下で，確率解析の理論展開を押し進めるとともに，幾何学など関連したテーマへの貢献を図ることを目指すものである．

３．研究の方法
上記で記した(a)(b)(c)の問題はお互いに密接に関連するものであるが，個別の問題としてはそれぞれに特有の議論を要する部分もあるため，それらについて以下で記述する．

(a) 状態空間がRiemann多様体で，その上で定義されたDirichlet形式に対応する自己共役作用素が2階の微分作用素である場合は，少なくとも形式的には確率微分方程式による拡散過程の記述が得られるため，確率過程のミクロなスケールによる挙動はBrown運動の適切な変形という形で理解される．しかしながら，例えばフラクタル上のDirichlet形式においては状況は全く異なるため,新たな理論が必要である．代表者の最近の研究において，一般の正則Dirichlet形式において指数という概念が定義され，強局所性のもとでそれは対応する拡散過程のマルチンゲール次元（標語的には拡散過程が含む独立なノイズの最大個数）に等しいことが示されている．また，ノイズの解析的な対応物は関数のエネルギー測度であると考えられるため，これらの定性的・定量的な性質を調べるという研究方針をとる．具体的には，解析手段が見つか

っていないSierpinski carpetに関するマルチンゲール次元の決定問題，マルチンゲール次元よりも更に詳しいノイズに関する指標をエネルギー測度から導出する問題について研究する．

(b) 代表者の以前の研究で，指数が１の自己相似フラクタル上の強局所Dirichlet形式において，定義域に属する関数は通常の意味では微分できないが，エネルギー測度に関するほとんどすべての点について，適切な参照関数との無限小変動の比としての“微分”の概念が定義可能であることを示した．類似の主張は一般の底空間，指数の場合にも成立すると予想されるため，まずその定式化及び証明を行う．幾何学的にはこの性質は「ほとんどすべての点において接空間が定義され，その（最大）次元が指数に一致する」ことを意味する．このように底空間に微分構造がない場合にも適切な関数空間においては微分が定義されることは従来あまり認識されてこなかった事柄であり，測度空間の枠組での微分幾何学の展開が可能であることを示唆されるため，引き続き幾何学への応用について検討を加える．近年Alexandorov空間などの特異集合を持つ空間における微分幾何学が注目を集めており，Dirichlet形式の理論を通した確率論的アプローチが行えないか考察する．

(c) 拡散過程を性質を理解する上で最も微妙な箇所が境界付近での挙動である．もしSkorokhod型の確率微分方程式で拡散過程が表現可能であれば，境界における反射の状況がよく理解されるといえる．これは滑らかな境界を持つEuclid空間の領域など，古典的な場合にはよく調べられていることである．Euclid空間および無限次元空間の領域の典型例では，Skorokhod表現をもつことと，領域において部分積分公式が成立すること，すなわち領域がCaccioppoli型であることとが同値であることが知られている．そのような状況でない場合にもDirichlet形式による拡散過程の構成は可能であるが，Skorokhod表現は持たず，境界付近でのミクロスケールの挙動の記述は不明である．一般に経路空間の典型的な領域はCaccioppoli型でないことが多いと考えられるため，こういった状況をも取り扱えるような，確率過程の記述法の一般論を整備することは有用であると考えられる．そこで，まずは対応するDirichlet形式の定義域について理解を深めることから研究を始め，次いで確率偏微分方程式による定式化を検討する．

４．研究成果

(1) Sierpinski Carpet上のブラウン運動に関するマルチンゲール次元がスペクトル次元以下であることを示した．特に点再帰的なケースではマルチンゲール次元は１であることが証明された．これは無限分岐的なフラクタルに関するマルチンゲール次元について初めて得られた情報である．また，この証明方法は有限分岐的なフラクタルに対しても適用でき，従来の結果において必要だった技術的な仮定をなくすこともできた．この結果についての論文執筆を行い，学術誌に投稿中である．

(2) 新古典不等式は２項定理の一種の一般化であり，ラフパス理論のある基本定理を示すためにT. J. Lyonsの1998年の論文で導入された．そこでの証明はやや高級な一般論を用いるもので，また数値計算の結果から，より精密な不等式の成立が予想されていた．原啓介氏との共同研究で，平易な議論により「剰余項付き分数冪２項定理」を証明し，そ

の系としてLyonsの予想が真であり， 更に得られた不等式に現れる係数が最良であることを示した．フラクタル上のラフパス理論の研究への手掛かりになるものと考えられる．この結果についての論文執筆を行い，学術誌に掲載された．

(3) 抽象ウィナー空間の可測部分集合がH-openかつH-convexであるとき，その上の（ノイマン型の）(1,2)-型ソボレフ空間が，有限次元的な滑らかな関数からなる関数族を稠密に含むことを証明した．これは自然に定義される2種類のソボレフ空間が一致することを意味しており，研究代表者による従前の結果を改良したものである．この種の空間の一致を示すことは無限次元空間の部分集合上の反射壁拡散過程の研究においては基本的な問題であるが，類似の結果は他に知られておらず，この方向の研究が更に進展するものと期待される．また，証明に用いた命題からの副産物として，H-openな可測集合は(1,p)-容量（但し1<p<∞）に関する準開集合であることもわかった．これらの結果について論文を執筆し，学術誌に掲載された．

(4) 研究代表者の以前の研究で，一般の強局所正則Dirichlet形式について各点指数という概念が定義され，指数はDirichlet形式に付随する拡散過程のマルチンゲール次元に一致することが示されていた．これに引き続く研究として，各点において各点指数を次元として持つ，一種の接空間の基底をなす関数族（座標系）が常に存在し，Dirichlet形式の定義域に属する任意の関数について，その座標系に関する1階のTaylorの公式が成立することを証明した．これはフラクタルのような微分構造を持たない空間においても，適切な関数空間には微分構造が導入されることを示しており，フラクタルの研究において微分幾何学的なアプローチの可能性を拓くものである．更に，この概念の確率解析への応用として，エネルギー有限のマルチンゲール加法汎関数全体からなる空間の構造が上述の幾何的構造を用いて簡潔に記述されることを示した．このことは指数という解析的な量が幾何構造・確率的構造とも結びつく量であることの表れであり，ディリクレ形式に付随する拡散過程の局所構造を研究する際に有用な概念であることを示唆するものである．これらの結果について論文を執筆し，現在投稿中である．

(5) 自己相似フラクタル上の自己相似ディリクレ形式に関して自然に定義される内在的距離が測地距離に等しいかという問題を研究した．これは解析的に定義された距離と幾何学的な距離が等しいかどうかという基本問題で，多様体のような滑らかな空間においては事情がよく分かっているが，フラクタルのような特異な構造を持つ空間についでは滑らかな場合の議論が通用せず，事情がわかっていなかった．今回，かなり広い範疇において，内在的距離は測地距離以上であることが示した．また，逆向きの不等式を，あるクラスのフラクタルに関して証明した．まだ十分に一般化された結果とは言えないため，引き続き研究を行う予定である．

以上は研究目的欄の(a)(b)(c)に密接に関連する成果であり，今後更に発展が期待できる内容である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

(1) Masanori Hino, Dirichlet spaces on H-convex sets in Wiener space, Bulletin des Sciences Mathématiques, Vol. 135 (2011), 667-683. DOI: 10.1016/j.bulsci.2011.07.008 （査読有）

(2) Keisuke Hara and Masanori Hino, Fractional order Taylor's series and the neo-classical inequality, Bulletin of the London Mathematical Society, Vol. 42 (2010), 467-477. DOI: 10.1112/blms/bdq013 （査読有）

(3) Masanori Hino, Sets of finite perimeter and the Hausdorff-Gauss measure on the Wiener space, Journal of Functional Analysis, Vol. 258 (2010), 1656-1681. DOI: 10.1016/j.jfa.2009.06.033 （査読有）

(4) Masanori Hino, Energy measures and indices of Dirichlet forms, with applications to derivatives on some fractals, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 100 (2010), 269-302. DOI: 10.1112/plms/pdp032 （査読有）

〔学会発表〕(計 11 件)

(1) 日野正訓，ディリクレ形式の指数とその応用，日本数学会特別講演，2012 年 3 月 26 日，東京理科大学

(2) 日野正訓，Differential-like structures associated with strong local Dirichlet forms, Stochastic Analysis and its Applications, 2012 年 3 月 16 日，新潟大学駅南キャンパス「ときめいと」

(3) 日野正訓，Differential-like structures associated with strong local Dirichlet forms, 4th Cornell Conference on Analysis, Probability, and Mathematical Physics on Fractals, 2011 年 9 月 11 日，Cornell University

(4) 日野正訓，強局所ディリクレ形式に付随した可微分的な構造について，Workshop フラクタルの数学的諸相，2011 年 2 月 21 日，かんぽの宿　山代

(5) 日野正訓，Dirichlet spaces on H-convex sets in the Wiener space, マルコフ過程と関連する話題，2011 年 1 月 30 日，関西大学

(6) 日野正訓，Martingale dimensions and derivatives for some fractals, Conference in Memory of Paul Malliavin, 2010 年 10 月 4 日，Université de Bourgogne, Dijon, France

(7) 日野正訓，Martingale dimensions for self-similar fractals, 34th Conference on Stochastic Processes and Their Applications, 2010 年 9 月 10 日，千里ライフサイエンスセンター，大阪

(8) 日野正訓，An upper estimate of the martingale dimension for Sierpinski carpets, Kyoto University/CUHK Joint Workshop on Analysis and Geometry of Fractals and Metric Measure Spaces, 2010 年 3 月 20 日，The Chinese University of Hong Kong

(9) 日野正訓，An upper estimate of the martingale dimension for Sierpinski

carpets, 研究集会 確率解析とその周辺,
2009 年 11 月 7 日, 東北大学

(10) 日野正訓, 新古典不等式について, マルコフ過程と確率解析, 2009 年 10 月 11 日, 岡山大学

６. 研究組織

(1)研究代表者

日野　正訓 (HINO MASANORI)
京都大学・大学院情報学研究科・准教授
研究者番号：40303888

(2)研究分担者

(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　)

研究者番号：