様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年５月２７日現在

機関番号：14501
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2009～2012
課題番号：２１７４００９８

研究課題名（和文）　ガルニエ系と完全ＷＫＢ解析

研究課題名（英文）　Garnier systems and exact WKB analysis

研究代表者
小池　達也（KOIKE TATSUYA）
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：80324599

研究成果の概要（和文）：パンルヴェ方程式や一次元シュレーディンガー方程式など線形・非線型の様々な二階常微分方程式に対する完全 WKB 解析の研究を行なった．それらの方程式に対して構成される WKB 解と呼ばれる形式解の Borel 変換像を調べ，WKB 解のボレル総和可能性の証明の成功，WKB 解の Borel 変換の特異点における特異性の解明などの成果を得た．

研究成果の概要（英文）：Exact WKB analysis is stuidied for second order linear or non-linear ordinary differential equations, such as Painleve equations and the one-dimensional Schrodinger equation. Main results of this project are giving a proof of Borel summability of WKB solutions to such equations, clarifying some properties of singularities of Borel transforms of WKB solutions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：完全 WKB 解析，ボレル総和法，ガルニエ系，パンルベ方程式，リッカチ方程式，一次元シュレーディンガー方程式，GKZ 超幾何系

１．研究開始当初の背景

完全 WKB 解析は 1983 年の Voros の論文「The return of the quartic oscillator. The complex WKB method」(Ann. Inst. Henri. Poincaré, 39 (1983)) により始まった．この論文では非調和振動子と呼ばれるポテンシャルを持つ一次元シュレーディンガー方程式を考察しており，量子力学で広く用いられている WKB 解に対して，ボレル総和法を適用することで真の解を構成し，それを用いて固有値問題の詳しい解析を与えている．Voros によるこの研究は，特異摂動型微分方程式に対してその解の大域的な挙動を形式

解のボレル和を用いて記述するという枠組みとして捉えられ，その観点からフランスのニース大学のグループによって resurgent function theory を取り入れた形で，あるいは，京都大学のグループにより超局所解析の手法を取り入れた形で，その基礎理論や応用が研究され発展してきた．この手法では WKB 解を近似解としてではなく真の解として扱うことから，従来の呼び名に「完全」の文字を加えて完全 WKB 解析と呼んでいる．

研究の当初の解析対象は特異摂動型二階常微分方程式であったが，その後の研究により，特異摂動型の高階線形常微分方程式，パンルヴェ方程式といった二階非線型常微分方程式，高階パンルヴェ方程式と呼ばれる高階非線型常微分方程式へと対象が広げられてきた．その結果，この分野の当初の目論見通り，完全 WKB 解析は微分方程式の解の大域的挙動の解析に優れていることがわかってきた．

一方，ガルニエ系は Garnier によりモノドロミー保存変形により導入されたもので，パンルヴェ方程式の多変数化を与えるものと考えられている．パンルヴェ方程式が新しい特殊関数を与えるとの期待のもとで導入され，その後実際に様々な応用の曲面で現われ，また，多くの深い事実が示されてきた．ガルニエ系も，例えば高階パンルヴェ方程式の中でも可積分系において興味を持たれているパンルヴェ階層の多くがガルニエ系として捉えられなど，特殊関数としての位置を確立しつつある．

２．研究の目的

このような発展を遂げてきた WKB 解析であるが，基礎理論においても未だ十分に研究がなされたとは言い難い面も少なからずある．本研究では（退化）ガルニエ系を対象として取り上げ，完全 WKB 解析の観点からその解析を実行する，あるいは，あるいは実行可能となるように完全 WKB 解析を発展させることにある．ガルニエ系自体も可積分系などで研究対象となるなど魅力的な対象であり，完全 WKB 解析の観点からの研究が進めば，その分野への貢献も大きくなるものと考えられる．非線形常微分方程式の中でもガルニエ系が選ばれる理由の一つとして，それがモノドロミー保存変形で与えることができる点にあり，（パンルヴェ方程式の場合と同じく）一次元シュレーディンガー方程式の解析を通して結果を得ることができると期待できる．また大きいパラメータを含むパンルヴェ方程式やパンルヴェ階層に対して構成されてきた形式解（零パラメータ解，インスタントン解）などの性質を解明するのも目標の一つである．

３．研究の方法

主たる研究の方法はボレル総和法を用いた漸近解析である．ボレル総和法により形式級数からラプラス積分表示を得るが，例えばストークス現象はこの手法では被積分関数の特異点が積分路を横切る際に生じるものとして理解できる．また，漸近展開として形式級数を意味付けるのではなく，ボレル和に関する「等式」として扱うために，指数的に小さい項を無理なく扱えるなどの長所を持つ。

さらに考察の対象となる方程式は特異摂動型の方程式である（その典型例はプランク定数を残した形でのシュレーディンガー方程式）．方程式の変数とは独立した形でパラメータを導入し，漸近解析を行なうことで解の大域的な挙動が解析しやすくなる．

４．研究成果

（１）二階線形常微分方程式に対する WKB 解のボレル総和可能性

有理関数を係数とする大きいパラメータを含む二階線形常微分方程式の WKB 解のボレル総和可能性は，完全 WKB 解析の一番の基礎となるべき個所であるにも関わらず，ボロスの研究以来未解決の問題として残されてきていた．（退化したものも含めて）ガルニエ系は有理関数を係数に持つ二階の線形常微分方程式のモノドロミー保存変形として与えられるので，これは本研究においても最重要課題である．難しさの主要因は WKB 解は正規化する基点とその基点からの積分路の選び方に依存するところにあり，実際に WKB 解のボレル変換像の特異点の位置はそれらに依存し，ボレル総和可能性もその基点の選び方に依存することになる．そこでこの正規化の問題を上手く扱うために，WKB 解の対数微分（これはリッカチ方程式を満たす）のボレル総和可能性を調べ，次に，対数微分の積分のボレル総和可能性を調べ，最後に WKB 解のボレル総和可能性を調べるという戦略を取った．その結果として，
次のことがわかった．

①係数が有理関数の場合，ストークス曲線線上でなければリッカチ方程式の大きいパラメータに関する巾級数解はボレル総和可能．

②係数が多項式の場合は WKB 解は，WKB 解を定める積分路がストークス曲線を横切らない限り，ボレル総和可能．

③有理函数の場合も，かなり一般的な状況でWKB 解がボレル総和可能.
このように二階線形常微分方程式に対して十分に満足の行く結果が得られた．（R. Schäfke 氏との共同研究.）

（２）単純変わり点及びポテンシャルの単純極での WKB 解の接続公式の確立

二階線形常微分方程式に対して，青木-河合-竹井により構成された単純変わり点の近傍におけるエアリ方程式への変換級数が，（簡単な仮定のもとに）ストークス曲線に沿って一様にボレル総和可能であることを(1)の結果を用いて示した．青木-河合-竹井の結果により，変換級数から構成される擬微分作用素によって，エアリ方程式の WKB 解のボレル変換が一般の方程式の WKB 解のボレル変換へと変換できることが知られていたが，本研究によりその擬微分作用素の定義域が半大域的に十分広く取れ，WKB 解のボレル変換の「動く特異点」の近傍における解析が可能となった．

その一つの帰結として，単純変わり点を端点とするストークス曲線における WKB 解のボレル和の接続公式も青木-河合-竹井の方針通り証明することができた．単純変わり点を端点とするストークス曲線を横切る際の WKB 解の接続公式は応用で広く用いられてきており，この研究結果の意義は大きい．同様の結果をポテンシャルの単純極とそれを端点とするストークス曲線について示すこともできた．この手法は汎用性が高いので例えば二重変わり点で同様の結論を得ることができると考えている．（神本晋吾氏との共同研究.）

（３）パンルヴェ方程式を含む二階非線形常微分方程式のあるクラスに対する零パラメータ解のボレル総和可能性

大きいパラメータが導入されたパンルヴェ方程式の，大きいパラメータに関する形式巾級数解を考察し，そのボレル総和可能性についての結果を得た．さらにその結果を一般化するために，大きなパラメータを含む特異摂動型の非線型正規型二階常微分方程式のあるクラスを設定し，やはり同様の結果を得た.

ここで考察した非線型常微分方程式のクラスは応用上は十分広く，例えば I 型から VI 型までの全てのパンルベ方程式を含んでいる．また，この研究は，ボレル総和可能である領域を定める非線形常微分方程式のストークス曲線の定義が妥当であることなど，従来予想されていた結果に（零パラメータ解のレベルでの）証明を与えたものとなっている．この研究によりパンルベ方程式に対する完全 WKB 解析の厳密な基礎理論の展開への第一歩が確立されたことになる．（神本晋吾氏との共同研究.）

（４）二階線形非斉次常微分方程式に対す WKB 解のボレル総和可能性の考察

大きなパラメータを含む特異摂動型の二階非斉次線形常微分方程式に対して構成される巾級数解のボレル総和可能性を調べた．この問題は大きいパラメータを含む三階線形常微分方程式の WKB 解のボレル総和可能性を調べる際の「第一歩」として定式化されたものである．つまり，三階線形常微分方程式の解の対数微分はある非線型二階常微分方程式を満足する．その方程式を逐次近似で解く際の最初の方程式が二階非斉次線形常微分方程式になる．例えば高階パンルヴェ方程式などの高階非線型常微分方程式の解の総和可能性を考える上でも欠かせない問題である．

この問題を考察するにあたって（古典的に良く知られた）斉次方程式の解による非斉次方程式の解の表示式を用いた．斉次方程式の解として WKB 解を用いるが，(1) の研究により WKB 解のボレル総和可能性は良くわかっている．従って問題となるのは，その WKB 解にある指数関数をかけて得られる形式巾級数の（独立変数に関する）積分の（大きいパラメータに関する）ボレル総和可能性となる.

この問題に対して積分のボレル和をボレル和の積分として表わすためには，積分路を分岐させなければならないなどがわかった．このように，結果自体にくわえて，証明中に得られた知見についても興味深いものとなった．（竹井義次氏との共同研究).

（５）ポテンシャルの主部に単純極を持ち，さらに低次項に強い特異性を持つ場合の解析

パンルベ方程式やガルニエ系を考察する際に重要となる一次元シュレーディンガー方程式に対する完全 WKB 解析について，ポテンシャルの大きいパラメータに関する主部が単純極であり，かつ，低次項に強い特異性を持つ場合を考察した．ただし，ポテンシャルの主部に単純極があり，大きいパラメータに関して次数が一つ低いところに二位の極がある場合を「特異性が強い」と呼び，次数が二つ低いところに二位の極がある場合を「特異性が弱い」と呼んでいる（例えばプランク定数を入れたクーロンポテンシャルに対す

るシュレーディンガー方程式の動径方向の方程式は弱い特異性を持つ方程式の例である）．低次項に強い特異性がない通常の場合は過去の研究で詳しく調べられており，また特異性が強い場合も過去に「合流操作」を用いて過去に接続公式を導いている（未発表）．

この研究では，形式級数のレベルでは特異性が強いポテンシャルに対するWKB解は特異性が弱い場合のそれからのパラメータのスケーリングとして得られること，スケーリングはボレル平面では微分作用素への置き換えに対応することを用いて，特異性の弱い場合のボレル平面内のWKB解のボレル変換像に関する結果を「シンボルの関係式」と考え，無限階の擬微分作用素の理論を援用することで特異性が強い場合もボレル平面内で解析できることがわかった．

これにより例えば特異性が強い場合でも接続公式を得ることができ，WKB 解のボレル和の大域的挙動の解析に有用であると期待できる．また，同様の手法を用いてホイッタカー方程式やルジャンドル方程式についても，その特異性が強い場合でもそのボロス係数の性質を調べることにも成功した．この研究は現在も進行中である．（河合隆裕氏・神本晋吾氏との共同研究）

（６）Modified GKZ 方程式系の解の漸近解析

ガルニエ系とも密接に関係する多変数超幾何関数である GKZ 超幾何方程式が合流型である場合に，ボレル総和法を援用することで Gevrey 級の解から真の解を構成する研究を行なった．原点への近づき方を重みベクトルとパラメータで指定し、そのパラメータに関する方程式(modified A-hypergeometric equation)を考察することで結果を得た．幾つかの仮定のもとに，パラメータに関する展開のボレル和が元の Gevrey 級の解を漸近展開に持つ解となる．この結果や手法は Stokes 現象を考察する際に有用となると期待できる．
（F. J. Castro-Jiménez 氏，M. C. Fernández-Fernández 氏，高山信毅氏との共同研究.）

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計９件）

①S. Kamimoto and T. Koike: On the Borel summability of WKB theoretic transformation series, To appear in Kôkyûroku Bessatsu. （査読有）

②S. Kamimoto and T. Koike: On the Borel summability of 0-parameter solutions of nonlinear ordinary differential equations, To appear in Kôkyûroku Bessatsu. （査読有）

③T. Koike and Y.Takei: On the Voros coefficient for the Whittaker equation with a large parameter – Some progress around Sato's conjecture in exact WKB analysis, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 47 (2011), 375-395. （査読有）

④T. Kawai, T. Koike and Y. Takei: On the exact WKB analysis of higher ordersimple-pole type operators, Adv. Math., 228 (2011), 63-96. （査読有）

⑤S. Kamimoto, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei: On a Schrödinger equation with a merging pair of a simple pole and a simple turning point -- Alien calculus of WKB solutions through microlocal analysis, Asymptotics in Dynamics, Geometry and PDEs; Generalized Borel Summation vol. II. (Publications of the Scuola Normale Superiore / CRM Series), (2011) 245–254. （査読有）

⑥T. Koike, T. Sasaki and M. Yoshida: Asymptotic behavior of the hyperbolic Schwarz map at irregular singular points, Funkcialaj Ekvacioj, 53 (2010) 99-132. （査読有）

⑦T. Kawai, T. Koike and Y. Takei: On the structure of higher order simple-pole type operators in exact WKB analysis, Funkcialaj Ekvacioj, 53 (2010), 249-276. （査読有）

⑧S. Kamimoto, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei: On the WKB theoretic structure of a Schrödinger operator with a merging pair of a simple pole and a simple turning point, Kyoto Journal of Mathematics, 50 (2010), 101-164. （査読有）

⑨T. Koike and H. J. Silverstone: Rereading Langer's influential 1937 JWKB paper: the unnecessary Langer transformation; the two ħ's, J. Phys. A: Math. Theor., 42 (2009), 495206 (11pp).

（査読有）

〔学会発表〕（計 10 件）

①T. Koike and Y. Takei：Exact WKB analysis of second-order non-homogeneous linear differential equations – Bifurcated integral and Borel summability, RIMS 研究集会「漸近解析に於ける超局所解析の展望」, 2011 年 11 月 18 日, 京都大学数理解析研究所

②神本晋吾, 小池達也： On the Borel summability of 0-parameter solutions of nonlinear ordinary differential equations, RIMS 研究集会「漸近解析に於ける超局所解析の展望」, 2011 年 11 月 18 日, 京都大学数理解析研究所

③河合隆裕， 神本晋吾, 小池達也, 竹井義次(京大数理研)：合流する単純極と単純変わり点を持つSchoedinger 方程式の完全WKB解析, 日本数学会秋季総合分科会・函数解析学分科会一般講演, 2011 年 9 月 29 日, 信州大学

⑤神本晋吾, 小池達也：WKB 解析的変換級数の Borel 総和可能性に関して, 日本数学会秋季総合分科会・函数解析学分科会一般講演, 2011 年 9 月 29 日, 信州大学

⑥T. Koike: Borel summability of WKB solutions for one dimmensional Schroedinger equations, RIMS 短期共同研究「Exact WKB analysis - Borel summability of WKB solutions」, 2010 年 9 月 8 日, 9 日, 10 日, 京都大学数理解析研究所

⑦小池達也: 一次元シュレーディンガー方程式の完全 WKB 解析 - 基礎理論と最近の発展について I, II, III, RIMS 研究集会「準古典解析における諸問題」,2010 年 7 月 5 日, 6 日, 京都大学数理解析研究所

⑧T. Koike: Borel summability of formal solutions of Riccati equations , S¥'eminaire Equations fonctionnelles IRMA, 2009 年 10 月 22 日, Strasbourg（フランス）

⑨T. Koike: On a Schrödinger operator with a merging pair of a simple pole and a simple turning point, II Computation of Voros coefficients and its consequence, Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation, 2009 年 10 月 15 日, CRM, Pisa（イタリア）

⑩T. Koike: On a Schrödinger operator with a merging pair of a simple pole and a simple turning point, II – Computation of Voros coefficients and its consequence, New Development of Asymptotic Analysis and Dynamical Systems, 2009 年 6 月 18 日, 京都大学数理解析研究所.

６．研究組織

(1)研究代表者
小池　達也（KOIKE TATSUYA）
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：80324599

6