

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月23日現在

機関番号：24403

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740103

研究課題名（和文） 時間遅れをもつ方程式の解の漸近的性質とスペクトル解析

研究課題名（英文） Asymptotic property of solutions of delay equations and spectral analysis

研究代表者

松永 秀章（MATSUNAGA HIDEAKI）

大阪府立大学・工学研究科・准教授

研究者番号：40332960

研究成果の概要（和文）：本研究では時間遅れをもつ方程式の解の漸近的性質とスペクトル解析に関する研究を行い、次の主要な研究成果を得ることができた。(1) 特定の項にのみ時間遅れをもつ線形積分微分方程式系や線形差分方程式系の零解の具体的な漸近安定条件を導出した。特に、対角成分に時間遅れをもつ場合、ある条件の下でパラメータを変化させると、零解は漸近安定と不安定をくり返しなが、最終的には不安定になる stability switches 現象が生じることを明らかにした。(2) 無限の時間遅れをもつ線形 Volterra 差分方程式に対する解の漸近公式を得るために、相空間における中心-不安定部分空間上での具体的な射影表現を確立した。応用として、絶対値が1の特性根から生じる漸近周期解を簡単に計算できることを示した。

研究成果の概要（英文）：In this research we have studied the asymptotic property of solutions of delay equations and spectral analysis, and have presented the following main results. (1) We have established some asymptotic stability conditions for the zero solution of linear integro-differential systems and linear difference systems with diagonal or off-diagonal delays. In particular, we have showed that stability switches appear in linear integro-differential systems as a parameter of diagonal delays increases under certain conditions. (2) For linear Volterra difference equations with infinite delay, we have obtained an explicit representation form of the projection on the center-unstable subspace in the phase space to get an asymptotic formula of the solutions. As an application, we have easily calculated some asymptotic periodic solutions of concrete equations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：時間遅れ，微分方程式，差分方程式，漸近安定性

1. 研究開始当初の背景

自然科学，工学や経済学（例えば生態系，伝染病，制御系，経済再生産等）において，

現象の変化が現在の状態だけでなく過去の状態にも依存する現象が数多くみられる。それらの現象を数学的にモデル化すると時間

遅れをもつ方程式で記述され、連続モデルは時間遅れをもつ微分方程式、離散モデルは時間遅れをもつ差分方程式でそれぞれ与えられる。この時間遅れの重要性がいち早く認識されたのは数理生態学であった。1970年代から、時間遅れをもつ生態系モデルの解の漸近的性質（安定性・振動性・有界性・周期解の存在等）が国内外で盛んに研究されてきた。しかし、これらの研究成果と具体的な生態系モデルに対する数値シミュレーションとを比較すると、しばしば大きなギャップがある。この第一の理由は、時間遅れをもつ微分方程式に対する最適ナリヤブノフ汎関数を構成することが非常に難しいので、十分すぎる安易な前提条件の下でしか、解の漸近的性質が議論されてこなかったためだと考えられる。したがって、時間遅れをもつ微分方程式の解の漸近的性質は十分解明されたとは言い難く、数学的に改善すべき問題点が多く残されている。また、20年前から時間遅れをもつ微分方程式を離散化した、時間遅れをもつ差分方程式が国内外で活発に研究されているが、関数微分方程式の定性理論の豊かな発展と比べると、関数差分方程式の定性理論は部分的にしか確立されていないのが現状である。

2. 研究の目的

本研究では、スペクトル解析を活用して、時間遅れをもつ微分方程式や差分方程式の解の漸近的性質を系統的に解析し、それらを数学的に厳密に証明することを目的とする。具体的には次の主要な研究テーマを解明したい：

(1) 特定の項にのみ時間遅れをもつ線形方程式系の零解の漸近安定性について

従来の数学研究では、方程式系のすべての項に同じ時間遅れを含む場合が主に扱われてきたが、他分野で現れる数理モデルでは特定の項に異なる時間遅れが含まれていると考える方が自然なことが多い。したがって、特定の項にのみ時間遅れをもつ線形微分方程式系の零解が漸近安定であるための必要十分条件を導出・証明する。また、すべての解が振動するための必要十分条件を与える。さらに、差分方程式系に対しても漸近安定問題および振動問題を考察し、時間遅れの影響を解明する。

(2) 無限の時間遅れをもつ線形 Volterra 差分方程式に対する解の漸近公式について

有限の時間遅れをもつ差分方程式（高階差分方程式）は連立1階差分方程式に変換できるので、線形系に対しては線形代数の基礎定理が、非線形系に対しては常微分方程式論に

対応する定性理論が活用できる。しかし、無限の時間遅れをもつ差分方程式はもはや連立1階差分方程式には変換できず、相空間上での関数解析的なアプローチが必要になる。本研究では、無限の時間遅れをもつ線形 Volterra 差分方程式とその形式的随伴方程式に付随する作用素のスペクトル解析により、相空間における中心-不安定部分空間上での具体的な射影表現を確立し、解の漸近公式を導出する。

3. 研究の方法

(1) 線形系の零解が漸近安定であることと特性方程式のすべての根が負の実部をもつことが同値であることを用いて、零解が漸近安定であるための具体的な必要十分条件を導出・証明する。時間遅れと係数のパラメータが多いため、煩雑な場合分けが予想されるが、数式処理ソフトによる視覚情報も十分活用し、複素平面上における特性方程式の根の分布を詳細に解析する。また、入念な数値シミュレーションを実行するため大学院生に研究補助をお願いする。

(2) 無限の時間遅れをもつ線形 Volterra 差分方程式の解作用素のスペクトル解析は、S. Murakami, Some spectral properties of the solution operator for linear Volterra difference systems, *New Developments in Difference Equations and Applications* (Taipei, 1997) 301-311, Gordon and Breach, Amsterdam, 1999. により既に行われている。したがって、関数微分方程式論から類推される Formal adjoint theory を構築するため、岡山理科大学の村上悟教授と共同研究を推進する。

4. 研究成果

(1) 単調性をもつ2次元非線形差分方程式系の解の大域的挙動を考察し、すべての解が非有界になるための十分条件と平衡点の大域的な安定多様体が存在するための十分条件をそれぞれ与えた。

(2) 2つの時間遅れをもつ2次元線形差分方程式系の零解が漸近安定であるための必要十分条件を係数行列と時間遅れのパラメータを用いて導出した。

(3) 非対角成分に時間遅れをもつ2次元線形微分方程式系に対して、時間遅れに依存する漸近安定条件と時間遅れに依存しない漸近安定条件を導出し、時間遅れの影響を無視した従来の結果を本質的に改善した。

(4) 対角成分に時間遅れをもつ2次元線形微分方程式系の零解が漸近安定であるための具体的なパラメータ領域を与えた。特に、ある条件の下でパラメータを変化させると、stability switchesが生じることも明らかにした。

(5) 時間遅れをもつ2次元線形差分方程式系の零解が漸近安定であるための具体的な必要十分条件を導出し、対角成分の項に含まれる時間遅れの影響を解明した。

(6) 対角成分の項に連続的な時間遅れをもつ2次元線形積分微分方程式系の零解が漸近安定であるための具体的なパラメータ領域を与えた。特に、ある条件の下で時間遅れのパラメータを変化させると、stability switchesが生じることも明らかにした。

(7) 無限遅れをもつVolterra差分方程式系の相空間における中心-不安定部分空間上での具体的な射影表現を確立し、解の漸近公式を導出した。これにより、絶対値が1の特性根から生じる漸近周期解を具体的に簡単に計算できるようになった。

(8) 非対角成分の項に連続的な時間遅れをもつ2次元線形積分微分方程式系の零解が漸近安定であるための必要十分条件を係数と時間遅れのパラメータを用いて具体的に与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

① H. Matsunaga and M. Suzuki, Effect of off-diagonal delay on the asymptotic stability for an integro-differential system, Appl. Math. Lett., (2012) (in press) 査読有.

② H. Matsunaga, S. Murakami, Y. Nagabuchi and Y. Nakano, Formal adjoint equations and asymptotic formula for solutions of Volterra difference equations with infinite delay, J. Difference Equations Appl., vol. 18, pp. 57-88 (2012) 査読有.

③ H. Matsunaga and H. Hashimoto, Asymptotic stability and stability switches in a linear integro-differential system, Differential Equations Appl., vol. 3, pp. 43-55 (2011) 査読有.

④ H. Matsunaga and C. Hajiri, Exact stability sets for a linear difference system with diagonal delay, J. Math. Anal. Appl., vol. 369, pp. 616-622 (2010) 査読有.

⑤ H. Matsunaga, Stability switches in a system of linear differential equations with diagonal delay, Appl. Math. Comput., vol. 212, pp. 145-152 (2009) 査読有.

⑥ M. Suzuki and H. Matsunaga, Stability criteria for a class of linear differential equations with off-diagonal delays, Discrete Contin. Dyn. Syst., vol. 24, pp. 1381-1391 (2009) 査読有.

⑦ M. Inoue and H. Matsunaga, Global behavior of a two-dimensional monotone difference system, Adv. Stud. Pure Math., vol. 53, pp. 129-139 (2009) 査読有.

⑧ F. Kawahigashi and H. Matsunaga, Asymptotic stability conditions for a delay difference system, Adv. Stud. Pure Math., vol. 53, pp. 141-149 (2009) 査読有.

[学会発表] (計7件)

① 松永秀章, 常差分方程式に対するペロン型の定理, 研究集会「微分方程式の定性的理論ワークショップ」, 島根大学, 2012年3月4日.

② 松永秀章, 村上 悟, 長渕 裕, 中野佑亮, 無限遅れをもつVolterra差分方程式に対する形式的随伴方程式と解の漸近公式, 日本数学会2011年度年会函数方程式論分科会, 早稲田大学, 2011年3月20日.

③ 松永秀章, 無限遅れをもつVolterra差分方程式の解の漸近公式, 研究集会「微分方程式の定性的理論ワークショップ」, 岡山理科大学, 2011年1月23日.

④ 松永秀章, 鈴木正克, 橋本浩樹, ある線形積分微分方程式系の漸近安定性に対する時間遅れの影響, 日本数学会2010年度年会函数方程式論分科会, 慶応義塾大学, 2010年3月24日.

⑤ H. Matsunaga, Exact stability sets for linear delay equations, Korea-Japan Joint Workshop on Dynamical Systems and Related Topics, Pusan, Republic of Korea, March 2-4, 2010.

⑥ 松永秀章, Geometric stability criteria for a linear integro-differential system, RIMS 研究集会「現象解析と関数方程式の新展望」, 京都大学数理解析研究所, 2009年11月18日.

⑦ H. Matsunaga, Stability switches in linear differential systems with diagonal delay, Equadiff 12: International Conference on Differential Equations, Brno, Czech Republic, July 20-24, 2009.

[図書] (計2件)

① 原 惟行, 松永秀章著, 「イプシロン・デルタ論法完全攻略」, 共立出版, 2011年12月, 205頁.

② 原 惟行, 松永秀章著, 「常微分方程式入門」, 共立出版, 2009年11月, 144頁.

[その他]

ホームページ等

<http://www.ms.osakafu-u.ac.jp/~hideaki/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松永 秀章 (MATSUNAGA HIDEAKI)

大阪府立大学・工学研究科・准教授

研究者番号：40332960