

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 26 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21740105

研究課題名（和文）

流体力学に現れる非線形偏微分方程式の半空間での解析とその応用

研究課題名（英文）

Study on half-space problem for non-linear PDE in Fluid Dynamics and its application

研究代表者

久保 隆徹 (KUBO TAKAYUKI)

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：90424811

研究成果の概要（和文）：

本研究では、流体力学の基礎方程式であるNavier-Stokes方程式の重み付き $L_p$ 空間での解析を中心に行った。その結果、重み関数がMuckenhouptクラスに属している場合、外部領域、半空間・摂動半空間においてStokes半群の重み付き $L_p$ - $L_q$ 評価を示すことができた。またそれを用いて初期値に重みが付いている場合にもNavier-Stokes方程式の解の一意存在性や時間無限大で漸近挙動も得ることができた。

研究成果の概要（英文）：

In this study, we studied analysis of weighted  $L_p$  space of Navier-Stokes equation, which is the basic equation of fluid dynamics. As a result, if the weight function belongs to the Muckenhoupt weight class, we are able to prove the weighted  $L_p$ - $L_q$  estimates of Stokes semigroup in exterior domains, half-spaces and perturbed half spaces. Moreover we could also show the unique existence of the solution to the Navier-Stokes equations and its asymptotic behavior in weighted  $L_p$  framework.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式・流体力学

## 1. 研究開始当初の背景

流体力学の基礎方程式であるNavier-Stokes方程式の数学的手法による本格的な解析は、1934年Lerayの研究によって始まった。彼は任意の初期データに対して時間大域的な弱解が少なくとも1つは存在することを証明した。Lerayによる弱解の構成方法はHopfにより洗練された。彼の手

法はアプリアリ評価が解の存在を保証するというものであり、今日の非線形偏微分方程式論の基礎となっている。それから約70年もの間、多くの人々によって研究されてきたが、Lerayが構成した弱解の一意性や正則性については未だ解決をみていない。

一方、一意的な滑らかな解の存在は初期値や外力に制限をつけて知られているのが現

状である。この研究は、後者に属している。領域の形状においては、2次元以上の全空間や半空間、外部領域、また3次元以上の aperture domain においては、初期値が小さい場合に時間大域解の一意存在性が示されている。また、今まで研究されていなかった摂動半空間においては次元が2次元以上で小さい初期値に対する時間大域解の一意存在性を示すことができ、またその手法を用いて2次元の aperture domain において同様の結果を示すことが私の今まで行ってきた研究でできている。

## 2. 研究の目的

【Navier-Stokes 方程式の半空間での解析をより詳細に行い、半空間からの摂動として与えられる領域に応用する。】

現在、Navier-Stokes 方程式は全空間やその摂動として与えられる外部領域において、多くの研究の蓄積がある。しかし、その一方半空間やその摂動として与えられる領域、特に摂動半空間や aperture domain などの領域では、外部領域と比較すると研究の蓄積が少ない。

そのため、流体力学の数学的な理論の大きなテーマの一つである「領域の形状と流体の流れとの関係」に対しては、現状では数学的に十分答えられていない。本研究では、そのテーマへの数学的解答を与えるべく、全空間や外部領域で示されていることを半空間やその摂動として与えられる領域、特に摂動半空間や aperture domain で示し、それらの領域での流体の挙動を解析することを目的とする。

### (1) 半空間での定常解の研究

Navier-Stokes 方程式の定常解については、3次元以上の外部領域において多くの数学者によって研究がなされてきた。しかし、2次元の場合については、Stokes' paradox との関係から定常問題は解かれていない。その理由の1つに挙げられるのが、全空間における2次元 Stokes 方程式の基本解に  $\log x$  の項が現れてしまうためである。一方、申請者の今まで行ってきた研究から、半空間における2次元 Stokes 方程式の基本解には  $\log x$  の項が現れないことが分かっており、全空間の場合よりも良い挙動をしているように思われる。しかし、2次元では定常解の無限遠での減衰度が  $1/|x|$  であることが期待できるが、 $L_2$  空間には属さないため同様の手法により定常解の存在を示すことができない。ところが、 $1/|x|$  の減衰度をもつ解は弱  $L_2$  空間に属することはよく知られており、弱  $L_p$  空間での定常解の存在を示した Borchers-宮川、小藪-山崎、山崎などの理論を見直し、弱  $L_2$  空間での定常解の存在を証明する。

### (2) 重み付き $L_p$ 空間での解析

全空間や外部領域においては、重み付き  $L_p$  空間で  $L_p$  理論の出発点である Helmholtz 分解やレゾルベント評価が示され、そのことを用いて Stokes 半群が生成されることが分かっている。また、その Stokes 半群に対してある種の重み付き  $L_p$ - $L_q$  評価が示されている。しかし、摂動半空間ではこれらのことが示されていない。そこで、半空間や摂動半空間で、外部領域で用いた手法を用いて Stokes 半群の重み付き  $L_p$ - $L_q$  評価を求める。さらにこれらの評価を用いて非線形問題に応用し、非線形問題における小さい初期値に対する時間大域解の一意存在を証明する。

### (3) 2次元 aperture domain での定常解の安定性の研究

3次元以上の aperture domain では、定常解の存在が示され、その安定性も示されている。しかし、2次元では、領域に対称性を仮定することで、定常解の存在が示されており、その定常解の小さい初期擾乱に対する漸近安定性は菱田俊明氏（名古屋大学）との共同研究により、弱  $L_p$  空間の議論を用いることで示すことができた。しかし、領域に対称性を仮定している点、初期値に smallness を仮定する点など不十分な点は多い。そこで本研究において、初期値に対する仮定をはずし、漸近安定性を示す。

### (4) 計算機援用証明法を用いた平行平板間の流れの解析

計算機援用証明法を用いて平行平板間の流れの解析を行う。平行平板間での定常流の近似解（できれば非圧縮条件を満たすような性質の良いもの）を求め、計算機援用証明法を用いて（最大値ノルムや  $L_2$  ノルムの意味で）その近くに真の解があることを示す。また、精度保証付き数値計算を用いて近似解と真の解の誤差評価を行う。

## 3. 研究の方法

### (1) 半空間での定常解の研究

3次元以上の半空間における定常問題の研究においては、外部領域での定常解と比較して、無限遠での減衰度が良い定常流の存在を示すことができています。2次元では定常解の無限遠での減衰度が  $1/|x|$  であることが期待できるが、 $L_2$  空間には属さないため同様の手法により定常解の存在を示すことができない。ところが、 $1/|x|$  の減衰度をもつ解は弱  $L_2$  空間に属することはよく知られており、弱  $L_p$  空間での定常解の存在を示した Borchers-宮川、小藪-山崎、山崎などの理論を見直し、弱  $L_2$  空間での定常解の存在を証明する。

### (2) 重み付き $L_p$ 空間での半空間の解析（小林孝行氏（佐賀大学）との共同研究）

外部領域においてはすでに重み付き  $L_p$  空間における解析が進んでいる。Farwig-Sohr により全空間でのレゾルベント Stokes 方

程式の解の表現公式を用いて重み付き  $L_p$  空間でのレゾルベント評価が示され、その結果を岩下による cut-off テクニックを用いることで、外部領域に拡張し、Bae-小林により Stokes 半群の重み付き  $L_p$ - $L_q$  評価が示されている。

半空間においても、全空間よりは煩雑ではあるが レゾルベント Stokes 方程式の解の表現公式を得ることができている。この表現公式を用いることで Farwig-Sohr の方法を用いて、重み付き  $L_p$  空間でのレゾルベント評価を示し、半空間での Stokes 半群の重み付き  $L_p$ - $L_q$  評価を示す。次に、摂動半空間への応用として、cut-off テクニックを用いることで、摂動半空間での重み付き  $L_p$ - $L_q$  評価を示す。

(3) 2次元 aperture domain での定常解の安定性の研究 (菱田俊明氏 (名古屋大学) との共同研究)

2次元 aperture domain においては領域に対称性を仮定した場合に無限遠での減衰度が外部領域と比較して良い定常解の存在が示されている。この定常解の安定性は弱  $L_p$  空間での議論を用いることで示された。しかし、その結果は不十分な点が多い。実際、安定性の議論には領域の対称性は必要ないが、定常解の存在の議論には領域の対称性が必要である。また、小菌-小川の結果から 2次元では初期値の smallness を仮定しなくても安定性を導くことができるが、この結果では初期値の smallness を仮定して安定性を導いている。

本研究の第 1 段階として、Borchers-宮川の手法を用いて、摂動が満たすべき方程式の線形化方程式から導かれる半群を生成し、その  $L_p$ - $L_q$  評価を求めることを考える。さらに、得られた半群の  $L_p$ - $L_q$  評価を用いて、小菌-小川の方法により初期値に smallness を仮定せずに定常解の安定性の証明を行う。

(4) 計算機援用証明法を用いた平行平板間の流れの解析 (長藤かおり氏 (九州大学) との共同研究)

計算機援用証明法を用いることで 2次元平行平板間での定常流の存在証明を行う。計算機援用証明法を用いて定常流の存在証明を行うためには、より良い性質をもつ定常流の近似解を得ることが重要なポイントになる。非圧縮粘性流体を考察する場合、非圧縮条件が必要になる。この性質をもった近似解を得ることが第一段階となる。この近似解が得られれば、非線型偏微分方程式の解の存在に対する計算機援用証明法の 1 つである Plum 法を用いて証明することが可能である。本研究においては第一段階である

より良い性質をもつ近似解を得ることを考える。もし、非圧縮条件を満たすような近似解を得ることが困難な場合はある意味で

非圧縮条件を満たすような近似解を構成する。計算機援用証明法を用いてその近似解の近くに真の解があることを不動点定理により示し、精度保証付き数値計算を用いてその誤差評価を行う。

#### 4. 研究成果

##### (1) 半空間での定常解

3次元以上の半空間での定常解の構成を従来使われていたポテンシャル理論を用いず Fourier 変換を用いて実際に定常解の表示を求めることができた。ただし、2次元の場合、その表示を用いても  $1/|x|$  が  $L_2$  空間に属さないということから、同様に示すことはできなかった。弱  $L_2$  空間で解析をしなければいけないが、未だそこまでの解析はできていない。これは今後の研究課題である。

##### (2) 重み付き $L_p$ 空間での解析

全空間や外部領域といった良く研究されている領域においてはすでに重み付き  $L_p$  空間の Helmholtz 分解やレゾルベント評価が知られており、その結果から導かれるストークス半群の重み付き評価や非線型方程式への応用も知られている。本研究では、それらの結果を半空間と摂動半空間に拡張し、同様の結果を得ることを試みた。その結果として一般の重み関数のクラスである Muckenhoupt クラスに属する重み関数に対してそれを重みにもつ  $L_p$  空間で Helmholtz 分解が成立することを摂動半空間において示すことができた。また、レゾルベント Stokes 方程式の解に対する重み付きレゾルベント評価を得ることができ、これにより重み付き  $L_p$  空間において Stokes 半群が生成することができた。さらに、重み関数を  $1+|x|, \langle x \rangle$  とした場合の重み付き  $L_p$ - $L_q$  評価を得ることができた。

また、それらを応用することですでに重みがない場合に対して得られている解に対しても初期値が  $L_n$  空間に属しかつ重み付き  $L_n$  空間にも属していれば同じ非斉次重みのついた漸近挙動を得ることが出来た。

さらに異なる形の Stokes 半群の重み付き  $L_p$ - $L_q$  評価も半空間、摂動半空間で得ることが出来た。それにより、初期値が重み付き  $L_n$  空間のみに属している場合について非線形問題の解の一意存在性と重み付き漸近挙動を得ることが出来た。さらに、全空間と半空間の場合には同様の評価が斉次重み  $|x|$  のついた場合に対しても成立することがわかり、同様に初期値が重み付き  $L_n/(1-s)$  空間に属している場合に対しても非線形問題の解の一意存在性と重み付き漸近挙動を得ることが出来た。この初期値が属する関数空間は重み考慮した

場合のスケーリング不変な関数空間であり、今迄Lp空間で構築されてきた理論の重み付き空間への拡張となっている。

さらに外部領域に対しては、Stokes 半群自身の非斉次重みの付いたLp-Lq評価は重み関数がMuckenhoupt クラスに入っていれば成立することが示され、Stokes 半群の微分に対する評価では考える関数空間の指数が重みを考慮した場合のスケーリング不変な関数空間の指数以下であれば、全空間の場合と同じ減衰度を得ることができ、指数がそれ以外であれば、局所エネルギー減衰定理と同じ減衰度をえることができることがわかった。これは重みがない場合の自然な拡張として考えることができる。

この評価により、初期値が重みを考慮した場合のスケーリング不変な関数空間に属している場合に対して、非線形問題の解の一意存在性と重み付き漸近挙動を得ることができる。また、新しく得られた評価により外部領域において得られている定常解の安定性への応用も4次元以上であれば重み付き評価を用いて示すことができる。

#### (3) 2次元 aperture domain での定常解の安定性の研究

Aperture domain において Stokes 作用素の分数べきの評価を得ることがこの研究の重要な鍵であるが、それを示すことは未だできていない。これは今後の研究課題である。

#### (4) 計算機援用証明法を用いた平行平板間の流れの解析

非圧縮条件を満たす近似解を計算機上で構成するのは煩雑であり、本研究では数値流体力学でよく使われているペナルティ法を用いて解析することを試みた。その結果、通常知られている誤差評価を Lp 空間へ拡張することができた。しかし、その誤差評価の最良定数などについては未だ分かっていないため、計算機援用証明法への応用は未だできていない。これも今後の研究課題である。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

(1) T. Kobayashi and T. Kubo,

“Weighted estimates of Stokes semigroup in unbounded domains”, Proceedings for the 4th MSJ-SI conference on Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, (to appear) (査読有).

(2) T. Kobayashi and T. Kubo,

“Weighted Lp-Lq estimate for the Stokes semigroup in half-space and perturbed half-space”, 研究集会“流体と気体の数学

解析”, 数理解析研究所講究録, **1730** (2011), 1-17 (査読無)

(3) A. Takayasu, S. Oishi and T. Kubo,

“Numerical Existence Theorem for Solutions of Two-Point Boundary Value Problems of Nonlinear Differential Equations”, NOLTA, IEICE, Vol. E93-N, No. 10 (2010), 105-118. (査読有)

(4) A. Takayasu, S. Oishi and T. Kubo,

“Numerical Existence Proofs and Guaranteed Error Bounds for Solutions to Two-Point Boundary Value Problems”, 研究集会“数値解析と数値計算アルゴリズムの最近の展開”, 数理解析研究所講究録, **1719** (2010), 48-60. (査読無)

(5) A. Takayasu, S. Oishi and T. Kubo,

“Computer assisted proofs of solutions to Nonlinear elliptic partial differential equations”, Proceedings of 2010 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2010) (2010), 135-138. (査読有)

(6) A. Takayasu, S. Oishi and T. Kubo,

“A priori inverse operator estimation for guaranteed error estimate”, Proceedings of 4th Workshop on Reliable Engineering Computing (REC2010) “Robust Design - Coping with Hazards, Risk and Uncertainty”, Singapore, (2010), 649-664. (査読有)

(7) A. Takayasu, S. Oishi and T. Kubo,

“Guaranteed error estimate for solutions to two-point boundary value problem”, Proceedings of 2009 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2009) (2009), 214-217. (査読有)

(8) A. Takayasu, S. Oishi and T. Kubo,

“Guaranteed error estimate for solutions to linear two-point boundary value problems with FEM”, Proceedings of ASIA SIMULATION CONFERENCE 2009 (JSST 2009) (2009), Paper ID: 163. (査読有)

(9) A. Takayasu, S. Oishi and T. Kubo,

“Numerical verification for solutions to nonlinear two-point boundary value problems with finite element method”, Proceedings of the 24th International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications (ITC-CSCC 2009) (2009), 165-168. (査読無)

[学会発表] (計 21 件)

(1) 久保 隆徹, 「ある非有界領域での Stokes 半群の重み付き Lp-Lq 評価とその応用」, 川大セミナー, 2012年2月23日, 神奈川大学

(2) 久保 隆徹, “Stability theorem for the stationary solution to Navier-Stokes

equations in half-space”, SIAM conf. on Analysis of Partial Differential Equations, 2011年11月17日, サンディエゴ (アメリカ),

(3) 久保 隆徹, “Weighted Lp-Lq estimates for the Stokes semigroup in unbounded domains”, 3rd China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, 2011年10月24日, 西北大学 (中国・西安)

(4) 久保 隆徹, 「Stokes 半群の斉次重み付き Lp-Lq 評価とその Navier-Stokes 方程式への応用」, 2011 年度日本数学会秋季総合分科会, 2011年10月1日, 信州大学

(5) 久保 隆徹, “Weighted Lp-Lq estimate for the Stokes semigroup in unbounded domains”, 4th MSJ-SI, Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, 2011年9月20日, 九州大学

(6) 久保 隆徹, 「半空間での Navier-Stokes 方程式の定常解の安定性について」, 日本流体力学会年会 2011, 2011年9月8日, 首都大学東京

(7) 久保 隆徹, 「Stokes 半群の重み付き Lp-Lq 評価の Navier-Stokes 方程式への応用」, 日本数学会 年会, 2011年3月23日, 早稲田大学

(8) 久保 隆徹, 「Stokes 半群の斉次重みをもつ Lp-Lq 評価とその Navier-Stokes 方程式への応用」. 日本数学会 年会, 2011年3月23日, 早稲田大学

(9) 久保 隆徹, 「半空間・perturbed half-space における Stokes 半群の重み付き Lp-Lq 評価について」, 日本数学会 秋季総合分科会, 2010年9月25日, 名古屋大学

(10) 久保 隆徹, “Analysis of Stokes Equations by Penalty Method”, Workshop on Regularity Aspects of PDEs - a Week for Wojciech Zajackowski, 2010年9月6日, Banach center (ポーランド)

(11) 久保 隆徹, “Weighted Lp-Lq estimate for the Stokes semigroup in half-space and a perturbed half-space”, 研究集会「流体と気体の数学解析」, 2010年7月7日, 京都大学数理解析研究所

(12) 久保 隆徹, 「半空間・perturbed half-space における Stokes 半群の重み付き Lp-Lq 評価について」, 日本数学会年会, 2010年3月27日, 慶応大学

(13) 久保 隆徹, “Criterion for stability of the stationary solution to Navier-Stokes equations in half-space”, International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2010年3月12日, 早稲田大学

(14) 久保 隆徹, “Criterion for stability of the stationary solution to Navier-Stokes equations in half-space”, Mathematical Theory for Navier-Stokes equations in

Various Domains, 2010年3月6日, 北海道大学

(15) 久保 隆徹, “Stability theorem for the stationary solution to Navier-Stokes equations in half-space”, Second Japan-China Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, 2009年11月16日, 九州大学

(16) 久保 隆徹, 「半空間における Navier-Stokes 方程式の定常解とその安定性について」, 日本数学会秋季総合分科会, 2009年9月27日, 大阪大学

[図書] (計1 件)

(1) 柴田良弘, 久保隆徹, 朝倉書店, 「非線形偏微分方程式」, 2012年, 1-211 ページ.

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

久保 隆徹 (KUBO TAKAYUKI)

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号: 90424811