

機関番号：32702

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2010

課題番号：21740106

研究課題名(和文) ナヴィエ・ストークス方程式の解の特異点解析

研究課題名(英文) Analysis of singularity of solutions to the Navier-Stokes equations

研究代表者

鈴木 友之 (SUZUKI TOMOYUKI)

神奈川大学・工学部・助手

研究者番号：80452423

研究成果の概要(和文)：Navier-Stokes 方程式の弱解の正則性を圧力に対するある条件の下で証明した。特に、圧力が Lorentz 空間に基づくスケール不変な空間において十分小さい場合、換言すれば自己相似的に小さい場合の爆発の可能性を排除した。またこの結果は MHD 方程式に対しては、圧力項に加え磁場がスケール不変な Lorentz 空間に属している場合に同様の結果が成り立つことも示された。

研究成果の概要(英文)：We prove regularity of weak solutions to the Navier-Stokes equations under the conditions on the pressure. In particular, we exclude the possibility of blow-up in the case that the pressure is small enough in scaling invariant spaces based on Lorentz spaces. This result can be applied to MHD equations if the magnetic field in addition to the pressure belongs to the scaling invariant spaces based on the Lorentz spaces with small norms.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学 基礎解析学

キーワード：偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

Navier-Stokes 方程式の時間大域的な滑らかな解の存在は未だ未解決である。現在までに知られているのは、滑らかな解の時間局所的な存在と、弱解の時間大域的な存在である。弱解の正則性のための十分条件としては、方程式固有のスケール変換に関して Lebesgue ノ

ルムが不変な空間に速度場が属している場合に多くの研究が行われている。2次元空間においてはスケール不変な空間と弱解の空間が一致するが、3次元空間においてはそれらにギャップがあるため、この仮定は付加的なものである。現在のところ弱解の正則性のためにはそれらが不可欠であるが、Lebesgue 空間はより広い Lorentz 空間や

Besov 空間などへ拡張されている。これらの拡張は単に数学的な興味だけではなく、解の爆発と密接な関係を持つ自己相似解およびそれと同じ爆発オーダーを持つ解を扱うことができるようにするためでもある。

一方で、もう一つの未知関数である圧力項に対応するスケール不変性の仮定を課した場合の弱解の正則性の研究も近年行われてきている。上記の速度場についての仮定の下では Helmholtz 射影や渦度方程式を扱うことにより圧力項は消去されるのであるが、圧力項に仮定を課し直接的に弱解の正則性に与える影響をみることは意味があるであろう。速度場による圧力項の評価は一定の範囲において正しいのであるが、逆の圧力項による速度場の評価は一般的には困難であるため、たとえ圧力項がノルムの不変性などを有していたとしてもそれが弱解の正則性を導くかどうかは自明でない。Lebesgue 空間においては圧力のノルムの不変性が弱解の正則性のための十分条件の一つであることが知られているが、速度場のときと同様に Lorentz 空間へ拡張できるかは未解決であった。

さらに進んだ問題としては、上で要求されている”ノルムが小さい”という仮定が取り除けるかということがある。速度場に対する仮定の下では、軸対称流については成功しているので、圧力の仮定においても軸対称流を扱うことが第一歩であろう。

また、ノイズを含んだ Navier-Stokes 方程式の研究が近年盛んに行われている。可解性やエルゴード性などさまざまな研究が行われているが、その中で力学系に注目した。ランダムな系では自励系と違い、時間マイナス無限大から現在にくる “pullback” 収束に基づくランダム・アトラクタが対象になる。非自励系の力学系を自励系の理論に乗せるためにはある種のコンパクト性が外力に要求されるが、典型的なノイズであるブラウン運動の軌道は一般にコンパクト性を持たないからである。

ノイズを持った 2 次元 Navier-Stokes 方程式とその粘性項を除いた Euler 方程式を考える。2 次元 Navier-Stokes 方程式の時間大域的一意可解性はわかっているが、Euler 方程式は時間大域的な弱解は存在するがその一意性はある不可条件の下で知られているのみである。

ノイズを含まない決定論的な場合には、Navier-Stokes 方程式および Euler 方程式の軌道アトラクタの存在とその粘性消滅極限によるアトラクタの収束が証明されている。この結果がノイズを持った系に対して拡張ができるのかは、未解決な問題である。特に、ノイズを持った Euler 方程式に対してはアト

ラクタの存在、中でもその可測性は未解決の問題である。

2. 研究の目的

上で述べた弱解の正則性のための十分条件は速度場を用いた定式化は数多いが、もう一つの未知関数である圧力による定式化を行う。特に、スケール不変な空間を Lebesgue 空間から Lorentz 空間へと拡張する。Lorentz 空間は斉次関数を含むのが特徴的であり、自己相似解と同じ爆発オーダーを持つ関数は Lorentz 空間に基づくスケール不変な空間に属している。もし解の爆発が起こるのであれば、自己相似解の爆発オーダーであろうと予測するのは自然であり、タイプ I 爆発とも呼ばれる。速度場が自己相似的であり、対応する Lorentz 空間において小さい場合にはその非爆発が示されているが、圧力が自己相似的であり速度場の情報はわからない場合にどうであるかは未解決である。そのためには圧力が Lorentz 空間に基づくスケール不変な空間に属している場合の正則性定理が必要である。

特に時間変数に関して Lorentz 空間を用いることが重要である。空間変数に Lebesgue 空間を用いたとしても時間変数が Lorentz 空間であれば、自己相似解が含まれるからである。このことは、Lebesgue ノルムは区間を絞ればノルムが小さくなる一方で、Lorentz ノルムはそのような性質を持たないことから推察される。

確率微分方程式に対するランダム・アトラクタの存在問題では、一意可解な方程式に対する研究が多い。また、一意性のない方程式には軌道アトラクタを考えるのが適切であるが、現在のところその空間は可分である必要がある。なぜなら、ランダム・アトラクタは自励系の場合と同様に共通集合や和集合により表されるが、その可測性は可分性により可算個の集合に対する操作へ帰着されるため多価写像の理論を広く援用できるのである。ランダム・アトラクタの可測性はその上での不変測度が存在するための必要条件であるように、その議論の中で最も基本的な性質の一つである。

2 次元 Euler 方程式の弱解の一意性は不可条件無しではわかっておらず、決定論的方程式で用いられた軌道空間が可分でないため、どのように軌道空間を定めるかは興味深い問題である。また別の問題としても、可分でない空間においてアトラクタの可測性をどのように議論するかということも興味深い問題である。

3. 研究の方法

速度場による Lorentz 空間での弱解の正則性定理では, Helmholtz 射影や渦度方程式により圧力項を消去して解析が行われていたため, 我々の場合には適用できない. したがって, iteration method と truncation 法を用いることによりアプリアリ評価を導出する. この方法は単独の楕円型や放物型方程式に対して発展してきた古典的な理論であるが, ベクトル値関数の方程式である Navier-Stokes 方程式へ応用されたり, 部分正則性の新たな証明法が得られたりと近年再度脚光を浴びている方法である.

エネルギー評価をする際に Lorentz 空間における Holder の不等式を用いると, 圧力項に対する弱い Lorentz 空間での仮定により, 他の項に強いノルムが現れるであろうことがわかる. それを回避する方法として, 特性関数の Lorentz ノルムは Lorentz 空間を特徴付ける二つの指数のうち, 第二指数には依存しないという事実が大きな役割を果たす. 特に, 時間変数に関して Lorentz ノルムを用いることが可能になるのはこの方法の著しい特徴である. 速度場に対する結果においては熱核の平滑化作用や比較定理が用いられていたが, 圧力の仮定の下での解析に対して新たな方法を確立できたといつてよいであろう.

ランダム・アトラクタの存在に関しては, これまでの研究が参考になるものもあるが, その可測性については可分でない軌道空間を持っている場合には多くの問題があるように思われる. 方法としては, 可分である適切な軌道空間を見つけることが最も近道である. それと同時に, 2次元 Euler 方程式では弱位相をもった軌道空間を扱う必要があるため, 距離付けするために有界集合での近似を行いつつ可測性の議論を展開していかなくてはならない.

またいま一つの方法としては, 2次元 Euler 方程式の一意性を保証する空間において議論をすることも可能であろう. この場合は, ランダム・アトラクタの議論よりも決定論的な方程式に対する力学系の理論に近いのではないかとと思われる.

4. 研究成果

上記の truncation 法により, 圧力項が Lorentz 空間に基づくスケール不変な空間に属していて, その大きさが Lorentz ノルムにおいて十分小さい場合に弱解の正則性が得られることを証明した. この結果は圧力が

自己相似的な振る舞いをしており, ある意味で小さいことが観察などによりわかれば, 解の爆発は速度場に対しても起こりえないことを示している. ここでは速度場に対する付加的な条件は必要ないということに注意しておく.

この方法を磁気流体 (MHD) 方程式にも適用した. MHD 方程式は Navier-Stokes 方程式に加えて磁場の方程式が連立されたものであるので時間大域的な弱解の存在が示されているのみである. われわれは, 圧力項および磁場が Lorentz 空間に基づくスケール不変な空間に属しており, それぞれ対応する Lorentz 空間において小さければ弱解は爆発しないことを示した. Navier-Stokes 方程式の場合と同様に, 既存の Lebesgue 空間における結果を Lorentz 空間へと拡張した.

上述の結果を導く際にこの方法だけでは扱えない範囲があることもわかった. スケール不変な空間は時間変数と空間変数についての可積分性に関する等式に基づいて与えられるが, 時間変数の可積分性が低い場合は解決することができなかった. これは一般に Navier-Stokes 方程式や MHD 方程式において, 圧力項の時間発展を解析することが困難であることに起因するのではないかと考えられる.

また, MHD 方程式については速度場のみによる正則性定理が定式化されており, Navier-Stokes 方程式については圧力項のみによる定式化があるので, MHD 方程式についても圧力項のみによる正則性定理の定式化が可能であろうと予想されるが, Lebesgue 空間における定式化においても未解決である.

ノイズを持った Navier-Stokes 方程式および Euler 方程式に対するランダム・アトラクタの問題については, 非自励系としての取り扱いができるという結果は得られた. しかしながら, その可測性つまりランダム・アトラクタであるかについては最終的な結論を得るに至っていないので今後も継続して研究を行っていかなければならない.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

- ① T. Suzuki, Regularity criteria in weak spaces in terms of the pressure to the MHD equations, AIMS proceeding, 掲

載確定

[学会発表] (計6件)

- ① 鈴木友之、Navier-Stokes 方程式のエネルギー等式について、2010年度日本数学会秋季総合分科会、名古屋大学、2010年9月25日
- ② 鈴木友之、Regularity criterion via pressure in Lorentz spaces to the MHD equations, AIMS conference, Dresden University of Technology, Germany, 2010年5月25日
- ③ 鈴木友之、Regularity criterion of weak solutions via pressure in Lorentz spaces to the Navier-Stokes equations, Workshop on PDE, University of Paderborn, Germany, 2010年3月3日
- ④ 鈴木友之、Survey on regularity criteria to the Navier-Stokes equations in Lorentz space, Sogang University, 韓国, 2010年1月28日
- ⑤ 鈴木友之、On regularity of weak solutions to the Navier-Stokes equations in Lorentz spaces, 若手による流体力学基礎方程式研究集会, 名古屋大学, 2010年1月6日
- ⑥ 鈴木友之、圧力の条件の下での Navier-Stokes 方程式の弱解の正則性について、2009年度日本数学会秋季総合分科会、大阪大学、2009年9月27日

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 友之 (SUZUKI TOMOYUKI)

神奈川大学・工学部・助手

研究者番号：80452423

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者
()

研究者番号：