

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 28 日現在

機関番号：34419

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740108

研究課題名（和文）

計算代数解析に基づく孤立特異点のデフォーメーションと b 関数との関係の研究

研究課題名（英文）

A study for deformation and b-function of isolated singularities on computational algebraic analysis

研究代表者

中村 弥生 (NAKAMURA YAYOI)

近畿大学・理工学部・准教授

研究者番号：60388494

研究成果の概要（和文）：

孤立特異点に付随した代数的局所コホモロジーとホロノミック系を、計算代数解析の観点から解析し、特に孤立特異点の  $\mu$  不変デフォーメーションに対して、微分方程式系に一定の条件を課した場合のデフォーメーションと b 関数の根の変化に関する公式を与えた。また、ライフエンの特異点に対するホロノミック系の構成に関する解析を行うことによって、Logarithmic Comparison Theorem の考察に有用となるホロノミック系の階数に関する結果を得た。

研究成果の概要（英文）：

Studying algebraic local cohomologies and holonomic systems attached to several types of isolated singularities from the view point of computational algebraic analysis, formulas concerning  $\mu$ -constant deformation of singularities and jumps of roots of b-functions are given under some conditions for systems of differential operators.

And a result on differential orders and a construction of holonomic systems which is useful for studies of Logarithmic Comparison Theorem is given.

交付決定額

（金額単位：円）

|         | 直接経費      | 間接経費    | 合計        |
|---------|-----------|---------|-----------|
| 2009 年度 | 600,000   | 180,000 | 780,000   |
| 2010 年度 | 600,000   | 180,000 | 780,000   |
| 2011 年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 年度      |           |         |           |
| 年度      |           |         |           |
| 総計      | 2,200,000 | 660,000 | 2,860,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：代数解析・D 加群・代数的局所コホモロジー・孤立特異点・b 関数

## 1. 研究開始当初の背景

(1) b 関数：関数の特異性を表す不変量として b 関数（ベレンシュタイン-佐藤多項式）は定義され、1970 年代には佐藤幹夫氏、柏原正樹氏らを中心とした代数解析学の精力

的な研究の中で b-関数理論は発展した。b-関数は、与えられた関数によって定義される微分作用素を線形写像としてみなすことにより、その固有値にあたるものとして解釈することができ、矢野環氏による様々な特異

点に対する  $b$ -関数の具体的計算や齋藤恭司氏による  $b$ -関数の根と特異点の分類に関する研究、三輪哲二氏による重みを用いた  $b$ -関数の決定に関する研究等、 $b$ -関数の計算に注目した様々な研究が行われている。申請者は、矢野氏の  $b$ -関数計算の手法において、代数的局所コホモロジーが明らかな形で用いられていることに注目し、矢野氏の研究と特異点の重み付き次数の概念を組み合わせることにより、 $b$ -関数と特異点の関係をより深く理解することができるのではないかと考えるに至った。

(2) 代数的局所コホモロジーの解析：矢野氏の行っている  $b$  関数の計算法においては、チュリナ空間の双対をなすコホモロジーのみが注目されているが、特異点の変化に注目するにはチュリナ空間の双対だけではなくミルナー空間の双対やその生成元であるコホモロジーにも注目することが不可欠である。特に、本研究の対象である  $\mu$  不変デフォーメーションをとらえるためには、 $\mathcal{O}$  加群としての生成元とヤコビデアルによるイデアル商の生成元との関係が重要な役割を果たしている。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、特異点に付随した代数的局所コホモロジーとホロミック系を解析することにより、特異点のデフォーメーションと  $b$ -関数の変化との関係を明らかにすることである。

特異点のデフォーメーション理論や  $b$  関数の計算に関するそれぞれの研究は、多くの研究者によってなされているが、デフォーメーション理論を  $b$  関数計算に応用するという方向性は、あまり研究されていない。本研究では、これらの融合により  $b$ -関数計算の効率化に着目する。特異点を考察する上で基本的な「重み」の概念を  $b$ -関数と密接な関係にある代数的局所コホモロジーに応用することにより、実際に  $b$ -関数を計算することができることが分かっているが、この発想は、擬斉次孤立特異点における  $b$ -関数の研究では広く知られていることである。本研究では、この発想を半擬斉次孤立特異点に拡張する。

## 3. 研究の方法

(1) 本研究の基本的な手法は、数式処理システムを用いた計算実験の結果を解析することにより、次の項目を一つ一つ解決して行くことである。

①代数的局所コホモロジーの重み付き次数と  $b$ -関数の根との対応関係の解明

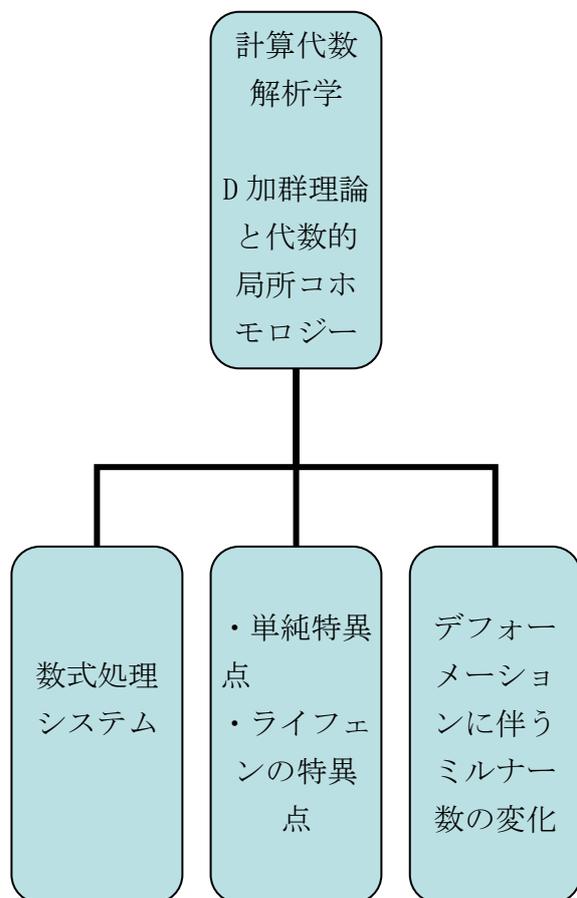
・特異点の重み月時数を用いた代数的局所コホモロジーの重み計算プログラムの作成（数式処理システム：Risa/Asir）

・特異点の  $b$  関数計算（数式処理システム：Risa/Asir、Singular）

②  $\mu$ -不変デフォーメーションによる  $b$ -関数の変化と代数的局所コホモロジー

・局所  $b$  作用素の計算とその固有値ベクトルとしての代数的局所コホモロジーとデフォーメーションにおける変化の解析（数式処理システム：Risa/Asir）

③ライフェンの特異点や単純特異点の考察  $\mu$  不変デフォーメーション (2) とは異なり、ミルナー数が増加するため、特異点やミルナー空間の双対である代数的局所コホモロジーの変化にも注目する必要がある。



(2) デフォーメーションに基づく  $b$  関数の計算法の導出

数式処理システム Risa/Asir を用いたプログラミングを行う。

(3) 海外の関連研究者との交流

・P. カスヌゲ氏（ボルドー大学 フランス）  
 $\mu$ -不変デフォーメーションによる  $b$ -関数の変化に関する研究を 1980 年代に行っている。

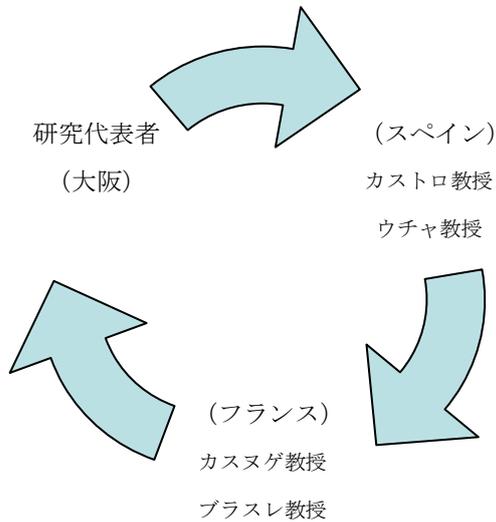
本申請研究とは手法が全くことなるため、カスヌゲ氏との議論は研究に様々な方向性を与えることができると考える。

・F. J. カストロ・ジメネズ教授、J. M. ウチャ教授 (セビリア大学 スペイン)

b 関数計算に用いる微分作用素 (b 作用素) との関係が大変強い Logarithmic Comparison Theorem に関する専門家である両教授との議論により、b 作用素の構成に関する情報収集を行う。

J-P. ブラズレ教授 (マルセイユ大学 (CIRM) フランス)

Singular Foliation の専門家であり、特異点のデフォーメーションとフォリエーションとの関係について議論する



#### 4. 研究成果

(1) b-関数計算における代数的局所コホモロジーの役割の解明

超平面孤立特異点  $f$  で、不変量  $L(f)$  が 2 であるようなものについて、アルゴリズム的な形では明示されていなかった b-関数計算における代数的局所コホモロジーの役割を明らかにした。この結果により、 $L(f)=2$  の場合に、 $\mu$ -不変デフォーメーション特異点 (デフォーメーションによってミルナー数を変化しないような特異点) における、デフォーメーションと b 関数の根の変化に関する公式を与えた。

(2) Logarithmic Comparison Theorem に関連した不変量の考察

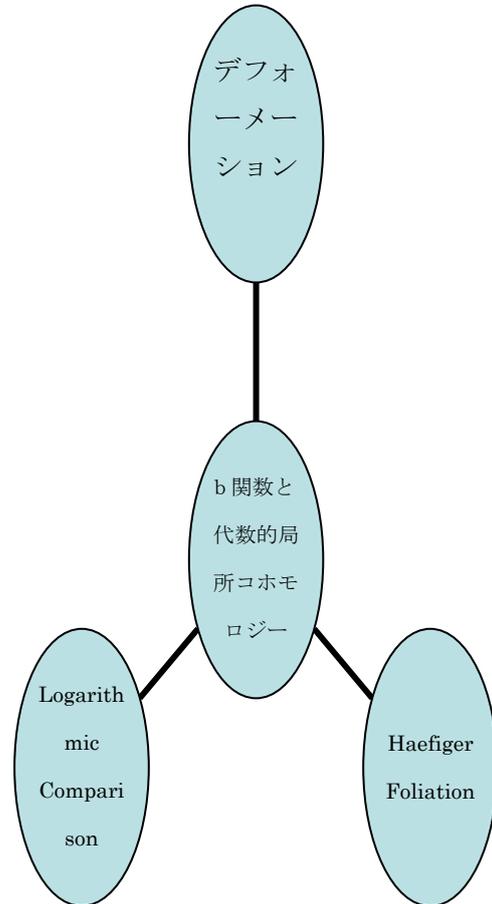
ライフエンの特異点に対する b 作用素の階数に関する結果を与えるとともに、その結果が

Logarithmic Comparison Theorem 考察に有用であることが議論によって明らかになった。この結果により、本研究の応用・発展として現在研究を進行中である。

(3) b 作用素の構成とグレブナ基底

b 作用素の具体的な構成に対してグレブナ基底の概念を用いた考察を行い、ライフエンの特異点に関する研究内容に関する論文を現在執筆中である。

また、これまで孤立特異点の標準形に対する b 関数の考察を中心に行ってきたが、Jean-Paul BRASSELET 教授との議論により、Singular Foliation の観点から b-関数を捉える方向性を得ることができた。特に、Haefliger Foliation を計算代数解析の観点から研究することにより、unfolding と b-関数との関係に着目した研究が可能となると考えられる。



これらの研究成果をまとめた論文を執筆・投稿中である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① 田島慎一、中村 弥生、Algebraic local cohomology classes attached to unimodal singularities, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読有、48, 2012, 21-43

[学会発表] (計 3 件)

- ① 中村 弥生・鍋島克輔・田島慎一、代数的局所コホモロジーを利用したパラメーター付スタンダード基底計算について、日本数学会、2010年3月25日、慶応大学
- ② 中村 弥生・田島慎一、Algebraic local cohomologies and local b-functions attached to semiquasihomogeneous singularities with  $L(f)=2$ , Singularities in Geometry and Topology, 2009年8月26日、ストラスブール大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中村弥生 (NAKAMURA YAYOI)  
近畿大学・理工学部・准教授  
研究者番号：60388494

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：