

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 1 日現在

機関番号：8 2 7 2 3

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009 年度～2011 年度

課題番号：21740109

研究課題名（和文）

対称マルコフ過程における加法的汎関数の大偏差原理

研究課題名（英文）

Large deviations for additive functional of symmetric Markov processes

研究代表者

土田 兼治 (Kaneharu Tsuchida)

防衛大学校・総合教育学群・講師

研究者番号：80466523

研究成果の概要（和文）：本研究において、研究者は様々な対称マルコフ過程から生成される加法的汎関数の大偏差原理を証明した。また加法的汎関数の大偏差原理が成り立つためのある十分条件を見だし、それを論文にまとめ出版された。

研究成果の概要（英文）：In this study, we prove large deviation principles for additive functionals associated with various symmetric Markov processes. Moreover, we find a sufficient condition to hold the large deviation principle, collect these conditions into a paper. This paper was published in 2011.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
平成 2 1 年度	900,000	270,000	1,170,000
平成 2 2 年度	1,000,000	0	1,000,000
平成 2 3 年度	800,000	0	800,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	270,000	2,970,000

研究分野：基礎解析学

科研費の分科・細目：確率解析

キーワード：確率論

1. 研究開始当初の背景

(1) 対称マルコフ過程に対する加法的汎関数の大偏差原理は、ブラウン運動または対称安定過程の場合においてしか証明されていなかった。ブラウン運動に関しては、その道が時間に対して連続であることと対応する生成作用素がラプラシアンであることから偏微分方程式、局所的なポテンシャル論を用いて証明することができるが、一般の対称安定過程の場合は、道が時間に対して不連続であり、その生成作用素が分数べきのラプラシアンになり、それに対するポテンシャル論はブラウン運動の場合と比べてそれほど知られてはいない。しかし、対称安定過程の場合は、

比較的様々な事実が知られており、それらと我々のアイデアを用いてスペクトル関数の微分可能性を証明し、その系として加法的汎関数の大偏差原理を得ることができた。

(2) それをもっと一般のマルコフ過程の場合に考察することが本研究を行う動機であった。特に、最近いろいろな擬微分作用素から生成される対称マルコフ過程の理論が発展してきており、例えば相対論的安定過程などに対してもスペクトル関数の微分可能性、そして加法的汎関数の大偏差原理が証明できているが、それ以外の表象をもつ擬微分作用素に対するマルコフ過程についてはまだ未

知の部分が多く、その方面で研究を進めて行きたいと考えていた。

2. 研究の目的

(1) さまざまな対称マルコフ過程から生成される加法的汎関数大偏差原理の証明をし、そのマルコフ過程の定性的性質を見いだすことが目標の一つであった。これにより、考えているマルコフ過程の漸近挙動などを研究するのも目的である。

(2) 状態空間がユークリッド空間でないような対称マルコフ過程についても研究したいと考えていた。その理由は、近年幾何学と確率論の関連が見いだされ、確率論のテクニックを使って、幾何学の問題を解いて行くことが研究されている。本研究ではまだ先の話であるが、幾何学的に複雑な構造をもつ状態空間上に値をとる対称マルコフ過程の加法的汎関数の大偏差原理を証明し、さらにコンピュータを利用することにより、そのレート関数を計算し、その状態空間の構造をマルコフ過程の漸近挙動によって調べるという大きな目標のために、まずリーマン多様体上のブラウン運動に対して、その加法的汎関数の大偏差原理を証明するのが目的である。しかし、リーマン多様体上にブラウン運動は構成できても、一般のジャンプ過程を構成しかつその一意性を示すのは難しい問題であり、この問題も研究して行きたいと考えていた。

3. 研究の方法

(1) まず大偏差原理が成り立つための十分条件であるスペクトル関数の微分可能性について考察した。スペクトル関数の微分可能性はあくまでも加法的汎関数の大偏差原理が成り立つための十分条件であり、微分可能性が成り立たなくても大偏差原理が成り立つ場合もある。しかし、本研究ではまずはスペクトル関数の微分可能性のアプローチから加法的汎関数の大偏差原理を研究して行くという方法をとった。そこで、スペクトル関数の微分可能性が成り立つための条件をなるべく一般的な形で表現し、それをもとにスペクトル関数の微分可能性を証明する方法をとった。

(2) グリーン関数がわかっていないものに対してスペクトル関数の微分可能性を証明する方法を発見した。そこでキーポイントとなるのが強 Feller 性であることを確認した。また、グリーン関数の漸近挙動を使うために、グリーン関数が陽に分かっていなくてもその原点付近あるいは遠方付近に置ける漸近挙動だけでもわかれば十分であることがわかった。またそれを使うために、conditional gaugeability と Harnack の不等

式が必要であることがわかった。

(3) ラプラシアンに対する Harnack の不等式は昔から知られているが、対称安定過程やその他の非局所的な生成作用素をもつ確率過程に対応する Harnack の不等式についての研究はこの 10 年で爆発的に発展した。まだ十分とは言えないが、かなり広いクラスの対称マルコフ過程に対して Harnack の不等式が成り立つことが多くの研究者によって示された。

以上の道具によってスペクトル関数の微分可能性を様々な対称マルコフ過程に対して証明した。

(4) 次にスペクトル関数の微分可能性を用いなくて、加法的汎関数の大偏差原理が成り立つためのマルコフ過程に対する十分条件を研究した。これは現在も進行中の研究であり、もうすぐ完成すると思われる。

(5) ジャンプをもつ加法的汎関数の大偏差原理についてもある条件の下で普通の加法的汎関数に帰着できることを確認した。

4. 研究成果

(1) 基礎となるマルコフ過程が相対論的安定過程の場合には既にある仮定のもと、加法的汎関数の大偏差原理を得ていたが、University of Washington の Z.-Q. Chen 教授とともにその仮定を外すことに成功した。その仮定とは、拡張化されたディリクレ空間から正の連続加法的汎関数を生成している測度に関する二乗可積分空間への埋め込みがコンパクトになるというものであったが、対称安定仮定の場合は、リースポテンシャルに関するソボレフの不等式を用いることによって、埋め込みのコンパクト性が言えたが、相対論的安定仮定では別の方法によって、埋め込みのコンパクト性を証明することができた。

(2) 基礎となるマルコフ過程がある条件を満たしているならば、そのスペクトル関数が微分可能であるという条件を研究し、論文②にまとめて出版された。

(3) 基礎となるマルコフ過程が概安定過程の場合に、長岡工業高専田原喜宏助教とともにスペクトル関数の微分可能性を証明し、そこから加法的汎関数の大偏差原理を得た。この研究の動機となったのは、概安定仮定に対する Harnack の不等式が、最近研究され、我々の道具として使える形になっていたためである。しかし、コンパクトな埋め込みに対しては、(1)で言える場合と言えない場合の両方があり、この部分にまだ深い問題が残って

いる。

(4) 基礎となるマルコフ過程の状態空間がユークリッド空間でない場合の大偏差原理の証明はまだ完成していないが、その解決策となる道具を見いだした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

① 土田 兼治、竹田 雅好、
Large deviations for discontinuous additive functionals of symmetric stable processes、*Mathematische Nachrichten*、284 巻、2011、1148-1171、査読有
DOI: 10.1002/mana.200810843

② 土田 兼治、
On a sufficient condition for large deviations of additive functionals、*Stochastics and Dynamics*、11 巻、2011、157-181、査読有
DOI: 10.1142/S0219493711003218

[学会発表] (計 10 件)

① 土田 兼治
Large deviations for additive functionals with jumps、
平成 21 年 6 月 18 日、
東北確率論セミナー、
東北大学

② 土田 兼治
Large deviations for additive functionals with jumps、
平成 21 年 7 月 8 日～10 日、
Kyoto RIMS Workshop on Stochastic Analysis of Jump Process and Related Topics、
京都大学

③ 土田 兼治
Large deviations for discontinuous Additive functionals of symmetric stable processes、
平成 21 年 8 月 3 日～6 日、
Workshop on Limit Theorems、
Institute of Information Theory and Automation, Academy of Sciences of the Czech Republic、
チェコ共和国、プラハ

④ 土田 兼治
Large deviations for additive functionals of jump type Markov processes、
平成 22 年 8 月 23 日～24 日、
第 13 回広島応用解析セミナー、
広島大学

⑤ 土田 兼治
加法的汎関数の大偏差原理が成り立つための十分条件について、
平成 23 年 10 月 18 日、
東京確率論セミナー、
東京工業大学

⑥ 土田 兼治
Strong and weak disorder for Levy Directed polymers in random environment、
平成 23 年 1 月 11 日～13 日、
Probability and PDE、
広島大学

⑦ 土田 兼治
Large deviations for additive functionals of nearly stable processes、
平成 23 年 3 月 9 日、
UW Probability seminar、
University of Washington、
United States

⑧ 土田 兼治
Large deviations for additive functionals of nearly stable processes、
平成 23 年 6 月 17 日、
東北確率論セミナー、
東北大学

⑨ 田原 喜宏
Differentiability of spectral functions for nearly stable processes and large deviations、
平成 23 年 9 月 29 日、
日本数学会 2011 年度秋季総合分科会、
信州大学

⑩ 土田 兼治
Differentiability of spectral functions for nearly stable processes、
平成 23 年 11 月 5 日、
マルコフ過程と関連する話題、
KKR 敬天閣、
鹿児島

6. 研究組織

(1) 研究代表者

土田 兼治 (Kaneharu Tsuchida)

防衛大学校・総合教育学群・講師

研究者番号：80466523