

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 4月21日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740110

研究課題名（和文） 種々の幾何学的発展方程式により記述される曲線および曲面のダイナミクス

研究課題名（英文） Dynamics of curves and surfaces governed by various geometric evolution equations

研究代表者

岡部 真也 （ OKABE SHINYA ）

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：70435973

研究成果の概要（和文）：研究成果の概要は以下のように述べる事ができる：(1) 確率的平均曲率流に従う最も起こりうる遷移過程を記述する時空汎函数に対する変分問題の臨界点の存在を証明した；(2) 長さが有限または無限であるような初期曲線に対して，修正型弾性エネルギー汎函数に対する最急降下方程式は時間大域的に滑らかな解をもつことを示した．さらに，初期曲線の長さが有限である場合には，その解はある時間列にそって時刻無限大とするとき，ある定常解へと滑らかに収束することを証明した．

研究成果の概要（英文）：The summary of our results are stated as follows: (1) We prove that there exists a critical point of the variational problem for a certain space-time functional defined on planar curves which is concerned with stochastically perturbed mean curvature flow for curves; (2) we show that, for a planar smooth non-closed curve with finite or infinite length, there exists a smooth solution of the steepest descent flow for the modified total squared curvature for any finite time. Moreover, we prove that, for an initial curve perturbed from line segment, the solution smoothly converges to a stationary solution along a certain sequence of time.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：偏微分方程式論，変分法

1. 研究開始当初の背景

幾何学的発展方程式は，平均曲率流方程式やポアンカレ予想の解析において注目さ

れた Ricci flow などに代表されるように，現在に至るまで盛んに研究されてきた．しかしながら，個々の問題の複雑さもあり，

その幾何学的発展方程式によって記述されるダイナミクスまで解明した例は稀である。本研究の全体構想は、種々の幾何学的発展方程式によって記述される曲線および曲面のダイナミクスを解明することである。その中で、本研究の具体的な目的は、以下で述べる3つの主題における曲線および曲面のダイナミクスを解明することである：

【主題 A】ノイズを考慮した平均曲率流方程式に支配される界面のダイナミクス

【主題 B】 Shortening-Straightening 流に支配される曲線のダイナミクス

【主題 C】一様な圧力をうける弾性閉曲線のダイナミクス

2. 研究の目的

本研究の具体的な目的は、上で述べた3つの主題における曲線および曲面のダイナミクスを解明することである。以下、各主題についてその詳細を記載する：

【主題 A について】

この研究は、通常平均曲率流方程式に時空上で定義される white noise 項を付け加えた確率的平均曲率流方程式の解の挙動に関するものである。具体的には、平面閉曲線に対する次の問題を考察する：「平均曲率流方程式によって、平面閉曲線 $C(0)$ は時刻 T で平面閉曲線 $C(T)$ へ変形されるものとする。このとき、確率的平均曲率流方程式によって $C(0)$ から $C(T)$ の近傍へ時刻 T で変形される遷移過程のなかで、最も起こりうる遷移過程はどのようなものか？」この問題は、大偏差原理を介して、ある action 最小化問題へと定式化される。action 最小化問題とは、エネルギー汎関数が二つの local minimizer をもつとき、その汎関数に対する勾配流方程式に white noise 項を加えた確率的勾配流方程式によって一方から他方の minimizer へと遷移する過程のなかで最も起こりうる遷移過程を決定せよ、という問題である。主題 A での目的は、上記の action 最小化問題を解明し、さらに曲面に対する問題へと拡張することである。

【主題 B について】

曲線の長さ汎関数に対する勾配流を記述する shortening 流や、弾性エネルギーに対する勾配流方程式である straightening 流については、これまで数多くの研究結果がある。実際、shortening 流は単純閉曲線を1点に消滅させる、ある意味での特異性を引き起こす効果をもつ一方で、straightening 流は単純閉曲線を円に近づける、ある意味での平滑化効果をもつことが知られている。近年、長さ汎関数と弾性エネルギーの和によって定義される汎関数に対する勾配を記述する幾何学的発展方程式 shortening-straighten

ing 流に関する研究がなされている。主題 B における目的は次の問題を考えることである：「例えば一方の穴が小さい8の字型のような、小さなループをもった閉曲線を初期状態として、shortening-straightening 流を考えたとき、その閉曲線のダイナミクスはどのようなものであるか？」

【主題 C について】

次のような物理的状況を記述する数理モデルの解析を行う：「平面内のピアノ線のような弾性体でできた閉曲線を考える。この閉曲線が囲む領域の内側とその外側から一様な圧力（例えば水圧）が働いており、内側から働く圧力より外側から働く圧力のほうが大きいとする。圧力差 p がある値より小さいときには円が安定であるが、 p が閾値をこえると座屈が生じ、円でない形状が現れる。このとき、閉曲線のダイナミクスはどのようなものか？」この問題は、曲率の二乗積分で定義される弾性エネルギーと仕事を表す面積汎関数に圧力差 p をかけたものの和で定義される汎関数の勾配に曲線の運動が支配されるとして定式化される。主題 C における目的は勾配流方程式に支配される閉曲線のダイナミクスを解明することである。

3. 研究の方法

本研究での解析方法は、主に以下のように述べることができる：

(1) 主題 B と C においては以下のような手順によって研究を行う：

- ① 運動を記述する発展方程式を導出し、その大域的可解性を検証する。
 - ② 平衡状態を調べるため、変分問題の臨界点の存在およびその安定性・不安定性を明らかにする。
 - ③ ①と②をあわせることによって曲線のダイナミクスを解明する。
- (2) 一方、主題 A においては、この問題は時空上の変分問題という特色があるため、その研究方法は次のように述べることができる：

- ① 第一変分を計算することにより、オイラー・ラグランジュ方程式を導出する。
- ② ①で求めたオイラー・ラグランジュ方程式に対する初期値終期値問題の可解性を証明する。
- ③ ②で得られた臨界点が最小解であることを証明する。

4. 研究成果

本研究における成果は次のように述べることができる：

(1) 主題 A において、平面閉曲線族に対して

定義される action 汎函数に対する変分問題について研究を行った。汎函数の臨界点を求めることを目的として、まず、オイラー・ラグランジュ方程式(EL)を導出した。action 汎函数は時空で定義される汎函数であるため、得られる方程式(EL)は時間および空間変数を含むものとして導出される。本研究の目的は、(EL)に対する初期値終期値問題を解くことである。この問題の困難な点は、(EL)が時間二階空間四階の偏微分方程式であり、かつ、発展方程式として見た場合に、初期値問題としてとくことのできない(不適切)な構造を持つ、という点である。本研究では、この難点を、「問題を発展方程式に対する初期値終期値問題としてみなさず、退化楕円型方程式に対する境界値問題として扱う」ことによって克服した。それにより、初期値と終期値が一方から他方に平均曲率流で変形されるような円からの摂動で与えられるとき、(EL)に対する初期値終期値問題の解の存在を証明することができた。この結果により、研究の目的で述べた問題に対しては、確率的平均曲率流方程式に起因する最も起こりうる遷移過程の候補を明らかにしたことになる。今後の課題としては、本研究で得られた臨界点が最小解であることを示すことにより、最も起こりうる遷移過程の決定することが第一に挙げられる。

- (2) 主題Bについては、研究開始当初は長さ有限の滑らかな平面閉曲線を対象としていた。しかしながら、研究を進めるなかで、平面非閉曲線の場合へと対象を変更することとした。その理由としては、閉曲線の場合には様々な幾何学的発展方程式に対する既存の結果が得られているのに対して、非閉曲線の場合には皆無であることが挙げられる。本研究の目的のひとつは、ダイナミクスを解明する具体例を構成することであるから、その目的も鑑みて、対象を変更することとした。その上で、得られた結果は以下のように述べる事ができる:

- ① 端点を固定された有限の長さをもつ平面非閉曲線に対して研究を行った。境界条件としては、端点で曲線の位置ベクトルを固定し、かつ、曲率が0であるとした。このとき、次の結果を得た:「両立条件をみだす滑らかな初期曲線に対して、S-S 流は時間大域的な滑らかな一意解をもつ。さらに、ある時間列にそって時間を無限大とするとき、その解はある定常解へと滑らかに収束する。」さらに、解のダイナミクスに関して次のよう

な部分的な結果も得て、現在、論文として投稿中である:「初期曲線が線分からの摂動で与えられるとき、解はその線分へと滑らかに収束する。」今後の課題としては、任意の初期曲線に対する解のダイナミクスを決定するために、対応する変分問題の解の安定性・不安定性を解明することが第一に挙げられる。最も興味深いのは初期曲線が自己交差する箇所をもつ場合であるが、曲線がただ一つのループ部分を持つ場合の解のダイナミクスでさえ未解決問題である。

- ② 無限の長さをもつ平面非閉曲線に対する S-S 流の可解性および解のダイナミクスについて研究を行った。まずは S-S 流が時間大域的に存在することを証明することを目的として研究を開始した。そのために、初期曲線には次のような仮定を課した:「初期曲線は無限の長さをもつ平面非閉曲線であって、自己交差する点はいくら存在しても構わないが、無限遠方では共通の直線(例えば平面の軸)に滑らかに漸近する」この仮定のもとで次のような結果を得て、現在、投稿準備中である:「上記の条件をみだす初期曲線に対して、S-S 流は任意有限時間において解をもつ。」この問題における難点のひとつは、対応する汎函数が非有界であることが挙げられる。一般に、勾配流方程式が時間大域的に存在することを証明するためには、対応する汎函数の初期状態における有界性を活用する。本研究においては、①で得た結果を基に、適当な近似解を構成することによって、この困難を克服した。しかしながら、この結果においては、初期曲線に対する解の一意性は証明されていない。従って、解の一意性を示すことが、解決すべき今後の課題としてまず挙げられる。また、解のダイナミクスを調べるために、時間を無限大とするときの解の漸近挙動を調べることも重要である。既に述べたように、対応する汎函数が非有界であるため、対応する変分問題を考察することは容易ではない。しかし、解の漸近挙動を詳しく知ることができれば、定常解の分類を行うことが期待できる。そういった意味でも、解の漸近挙動を知ることが異議がある研究といえる。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

1. 岡部真也, The variational problem for a certain space-time functional defined on planar closed curves, Journal of Differential Equations, 査読有り, 252, 2012, 5155-5184.
2. 岡部真也, The existence and convergence of the shortening - straightening flow for non-closed planar curves with fixed boundary, Gakuto International Series, Mathematical Science and applications, International Symposium on Computational Science 2011, 査読有り, 34, 2011, 1-23.
3. 岡部真也, Remarks on the motion of non-closed planar curves governed by shortening-straightening flow, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無し, 1746, 2011, 34-48.

[学会発表] (計 13 件)

1. 岡部真也, Long time existence of shortening-straightening flow for non-closed planar curves with infinite length, 2011 NCTS Taiwan-Japan Joint Workshop on PDEs and Geometric Analysis, 2011 年 12 月 21 日, National Center for Theoretical Science (Taiwan)
2. 岡部真也, The gradient flow for the modified one-dimensional Willmore functional defined on planar curves with infinite length, The 4th MSJ-SI Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, 2011 年 9 月 12 日, 九州大学 (福岡県) .
3. 岡部真也, The existence of shortening-straightening flow for non-closed planar curves with infinite length, RIMS 研究集会「非線形現象に現れる界面運動の数理解析・数値解析, 2011 年 7 月 13 日, 数理解析研究所 (京都府) .
4. 岡部真也, The existence of shortening-straightening flow for non-closed planar curves with infinite length, International Symposium on Computational Science, 2011 年 2 月 15 日, 金沢大学 (石川県) .
5. 岡部真也, The motion of non-closed planar curves governed by shortening-straightening flow, RIMS 研究集会「現象の数理解析に向けた非線形発展方

式とその周辺」, 2010 年 10 月 13 日, 数理解析研究所 (京都府) .

6. 岡部真也, The variational problem for a certain action functional defined on closed curves, Variational problems for curves and surfaces and related topics, 2009 年 7 月 2 日, 奈良女子大学 (奈良県) .
7. 岡部真也, The variational problem for a certain space-time functional defined on closed curves, 保存則と幾何学的発展方程式およびその解析, 2009 年 6 月 11 日, 数理解析研究所 (京都府) .

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡部 真也 (OKABE SHINYA)

東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号 : 70435973

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :