

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月28日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740111

研究課題名（和文） 気体力学に現れる非線形偏微分方程式の安定性解析と非線形構造

研究課題名（英文） Stability and nonlinear structure for the nonlinear partial differential equations of gas dynamics.

研究代表者

上田 好寛 (UEDA YOSHIHIRO)

神戸大学・大学院海事科学研究科・講師

研究者番号：50534856

研究成果の概要（和文）：本研究では衝撃波や希薄波などに代表される非線形波に対する安定性解析を行った。特に物理現象を記述する方程式に現れる非線形性のどの点に着目することで安定性が得られるかについて議論を進め、ある種の一般論の構築に成功した。

更には、より現実を考慮したモデル方程式を考察することで、これまでにあまり注目されていなかった、新たな数学的性質を抽出することにも成功した。

研究成果の概要（英文）：I analyzed the asymptotic stability of the nonlinear waves for some equations. Especially I focused on the nonlinearity which appears in the equation which describes a physical phenomenon. And I succeeded the construction of a certain kind of generalities.

Furthermore, I considered some physical models and got the new dissipative structure of the equations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式の大域理論，安定性解析

1. 研究開始当初の背景

これまでの既知の研究結果では、偏微分方程式の非線形項に凸性を仮定した場合を考察し、安定性解析を行ったものが主であった。しかし、現実の物理現象を詳細に記述した方程式では、van der Waals 型の粘性気体の方程式系等、非線形項に凸性がないものも多い。従って、物理的背景をより重視するためには、非線形項に凸性を仮定しない形で厳密な数学理論を構築することが重要な課題の一つ

になる。

また、実際の応用にも配慮するならば、様々な問題の多次元への拡張も重要な課題である。自身でも多次元空間の問題を扱った研究をいくつか行っているが、これまでに成果を上げた研究は空間一次元の解析が中心であった。物理現象に反映させるためにも、今後は得られた結果の多次元化にも着目して研究を行っていくことが非常に重要である。

2. 研究の目的

(1) 様々な方程式に対し、既に得られている結果には非線形項に凸性を仮定したものが多い。そこで、気体力学の最も基本となる粘性保存則での解析を基に、自身が扱う非線形移流項付き消散型波動方程式に対して研究を行い、凸性の仮定を緩めることで、これまでの結果と同様の結論が導かれるかを議論するのが目的である。

(2) 本研究では多次元における非線形波の安定性理論を構築するための具体的な一例として、多次元半空間における非線形移流項付き消散型波動方程式に現れる平面定常波の安定性解析について議論した。

(3) ここでは、始めにプラズマ現象を記述する Euler-Maxwell 方程式の安定性解析を行った。Euler-Maxwell 方程式の安定性について解析することは物理背景を考慮しても大変意味のある研究である。さらにその一方で、数学的には通常の対称双曲型の方程式系と比べると可微分性を損失しており、これまでの理論が適用出来ず新たな解析法の構築が必要不可欠なことから本研究の重要性が伺える。

3. 研究の方法

(1) まず始めに、放物型の方程式で現される単独の粘性保存則を題材に、空間 1 次元半空間での定常波と希薄波との重ね合わせに対する安定性について議論し、初期摂動が L^1 空間かつ H^1 空間に含まれることを仮定した際の定量的時間減衰評価が得られることを示した。ここで扱った手法は重み付きエネルギー法によるものであるが、重みの選び方が最大の論点であった。ここでは重み関数を対応する非線形波に依存するように設定し、上手く消散構造が得られるようにするのが最大の特徴である。

また、上記の結果を参考に、非線形移流項付き消散型波動方程式に現れる、定常波と希薄波の重ね合わせの漸近安定性についても解析を行った。定常波と希薄波の重ね合わせに対する漸近安定性は双曲型の特性により困難が予想される。そこで本問題の解決策として粘性保存則で培ったエネルギー計算を応用し、その経験をどの程度活かせるかが最大の論点であった。

(2) 本多次元化問題に関して、まず始めに、自身の研究で扱った平面定常波の安定性問題について、接方向に関する Fourier 変換を用いることで異なった視点からの解析を行い、新たな手法の確立を試みた。詳しくは、境界値問題を扱うにあたり、接方向と法線方向とに区別した空間で解析を行うのは基本

的な手法であるが、多次元半空間の接方向にのみ Fourier 変換を適用することで、時間減衰率を更に改善することを目指して研究を行っている。

(3) Euler-Maxwell 方程式は通常の対称双曲型の方程式系と比べると可微分性を損失しており、解の存在を示すには工夫が必要である。そこで、エネルギーの定義に着目し、時間重み付きのエネルギー法により如何に消散構造を導出するかに重点を置くことで、解の存在と漸近安定性を導出することに成功した。

また、時間重み付きエネルギー法を用い、Euler-Maxwell 方程式の詳細な解析を行うことで減衰構造の更なる解明に取り組んだ。その結果、詳細な減衰構造が明らかになり、定量的時間減衰評価が得られるとともに、可微分性損失の仕組みを把握することに成功した。

4. 研究成果

(1) 本研究により、空間 1 次元半空間における凸性を仮定しない非線形項を持つ粘性保存則に現れる定常波と希薄波との重ね合わせに対する定量的収束評価を得ることに成功した。

また更には、非線形移流項付き消散型波動方程式に現れる定常波と希薄波の重ね合わせの漸近安定性と対応する定量的減衰評価の導出も行った。

本結果はより現実の現象を考慮した基礎方程式の安定性解析において一つの有用な手法となることが期待される。

(2) 本研究によって、多次元半空間における安定性解析に関して、Fourier 変換とエネルギー法を組み合わせることでより詳細な定量的時間減衰評価が得られることが示された。本手法は他の方程式に対しても有用であり、更なる応用が期待される。

(3) 本研究により、Euler-Maxwell 方程式の漸近安定性ととも詳細な減衰構造が明らかになった。また、本方程式に現れる可微分性の損失は、梁の振動を記述する Timoshenko 方程式系にも現れることが知られており、本性質が方程式のどのような効果により導かれるかを考察するのは非常に重要である。そこで、その経験を生かすことで、Euler-Maxwell 方程式や梁の振動を記述する Timoshenko 方程式を包括するような一般の方程式系に関する安定性を議論し、その特徴付けに着手した。その結果得られたのが、可微分性損失の引き金となる非対称な緩和項をもつ対称双曲型方程式系に対する安定性理論である。内容としては、可微分性損失

を引き起こすメカニズムを詳細に記述するとともに、安定性を構築するための条件を導入している。更には、ある特別な条件下では可微分性損失が起こらないことについても言及している。この安定性理論は、これまでに知られていた物理モデルに関する多くの結果を包括するものであり、更には今後様々な物理モデルにも適用されることが期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① Yoshihiro Ueda, Shu Wang, Shuichi Kawashima, Dissipative structure of the regularity-loss type and time asymptotic decay of solutions for the Euler-Maxwell system, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 査読有, 2012, accepted.
- ② Yoshihiro Ueda, Renjun Duan, Shuichi Kawashima, Decay structure for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxation and its application, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 査読有, 2012, accepted.
- ③ Itsuko Hashimoto, Yoshihiro Ueda, Anti-derivative method in the half space and application to damped wave equations with non-convex convection, Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, 2012, published.
- ④ Itsuko Hashimoto, Yoshihiro Ueda, Asymptotic behavior of solutions for damped wave equations with non-convex convection term on the half line, Osaka Journal of Mathematics, 査読有, 2011, published.
- ⑤ Yoshihiro Ueda, Shuichi Kawashima, Decay property of regularity-loss type for the Euler-Maxwell system, Method and Applications of Analysis, 査読有, Vol. 18, No. 3, 2011, pp245-268.
- ⑥ Yoshihiro Ueda, Tohru Nakamura, Shuichi Kawashima, Convergence rate toward degenerate stationary wave for compressible viscous gases, The proceedings NACA 2009, 査読有, 2010, pp. 239-248.
- ⑦ Itsuko Hashimoto, Yoshihiro Ueda, Shuichi Kawashima, Convergence rate to the nonlinear waves for the viscous conservation laws on the half line, Methods and Applications of Analysis, 査読有, Vol. 16, No. 3, 2009, pp. 389-402.

[学会発表] (計 33 件)

- ① 上田 好寛, 加藤 正和, Large time asymptotics for the damped wave equations, 日本数学会 2012年度年会, 2012年3月26日, 東京理科大学.
- ② 上田 好寛, 非対称な緩和項を持つ対称双曲型方程式系の解の減衰構造について, 非線形解析セミナー@大岡山, 2012年3月7日, 東京工業大学.
- ③ Yoshihiro Ueda, Decay structure for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxation, 7th Vienna International Conference on Mathematical Modeling (MATHMOD2012), 2012年2月16日, Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
- ④ 上田 好寛, Dissipative structure of regularity-loss type for symmetric hyperbolic systems with relaxation, 若手による流体力学の基礎方程式研究会, 2012年1月6日, 名古屋大学.
- ⑤ Yoshihiro Ueda, Decay structure of regularity-loss type for symmetric hyperbolic systems with relaxation, SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations, 2011年11月15日, San Diego Marriott Mission Valley, San Diego, California USA.
- ⑥ Yoshihiro Ueda, Decay structure for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxation, Third China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, 2011年10月24日, Northwest University, Xian, China.
- ⑦ 上田 好寛, 非対称な緩和項を持つ対称双曲型方程式系の安定性解析について, HMCセミナー, 2011年10月14日, 金沢大学.
- ⑧ 川上 竜樹, 上田 好寛, 非線形消散型波動方程式の解の熱核への詳細な収束評価について, 日本数学会 2011年度秋季総合分科会, 2011年10月1日, 信州大学.
- ⑨ 上田 好寛, Renjun Duan, 川島 秀一, 非対称な緩和項を持つ対称双曲型方程式系の減衰構造, 日本数学会 2011年度秋季総合分科会, 2011年10月1日, 信州大学.
- ⑩ Yoshihiro Ueda, Large time behavior of solutions to symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relax

- ation, *Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations* (The 4th M SJ-SI), 2011年9月18日, 九州大学.
- ⑪ 上田 好寛, Decay structure of regularity-loss type for symmetric hyperbolic systems with relaxation, *流体と気体の数学解析 RIMS研究集会*, 2011年7月7日, 京都大学.
- ⑫ 上田 好寛, 非対称な緩和項を持つ双曲型方程式系の安定性解析, *微分方程式セミナー*, 2011年6月24日, 大阪大学.
- ⑬ 上田 好寛, 弱い緩和項を持つ対称双曲型方程式系の消散構造と安定性解析, *熊本大学応用解析セミナー*, 2011年5月14日, 熊本大学.
- ⑭ 上田 好寛, 弱い緩和項を持つ双曲型方程式系の安定性解析, *神戸解析セミナー*, 2011年5月6日, 神戸大学.
- ⑮ Yoshihiro Ueda, A new stability condition and dissipative structure of regularity-loss type for symmetric hyperbolic system, *Workshop on Applied Mathematics (Euskadi-Kyushu 2011)*, BCAM, Bilbao, Spain.
- ⑯ Yoshihiro Ueda, Dissipative structure of the regularity-loss type and the asymptotic stability of solutions to the Euler-Maxwell system, *IMS PDE Seminar*, 2011年3月1日, IMS, CUHK, Hong Kong, China.
- ⑰ Yoshihiro Ueda, Time asymptotic decay of solutions for the Euler-Maxwell system, *The 3rd GCOE International Symposium*, 2011年2月18日, 東北大学.
- ⑱ 上田 好寛, Euler-Maxwell方程式の時間大域解の存在とその消散構造について, *第8回 浜松偏微分方程式研究集会*, 2010年12月20日, 静岡大学.
- ⑲ 上田 好寛, Dissipative structure of the regularity-loss type and the asymptotic behavior of solutions to the Euler-Maxwell system, *微分方程式の総合的研究*, 2010年12月19日, 京都大学.
- ⑳ 上田 好寛, Euler-Maxwell方程式の時間大域解の存在と解の減衰評価, *北大PDEセミナー*, 2010年10月25日, 北海道大学.
- 21 上田 好寛, Asymptotic behavior of solutions to Euler-Maxwell system, *第6回 非線形の諸問題*, 2010年9月17日, 山口大学.
- 22 Yoshihiro Ueda, Convergence rate to the nonlinear waves for viscous conservation laws on the half line, *Regularity Aspects of PDEs*, 2010年9月8日, Bedlewo Conference Center, Bedlewo, Poland.
- 23 Yoshihiro Ueda, Application of the anti-derivative method to the half space problem for damped wave equation with non-convexity, *13th International Conference on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications (HYP 2010)*, 2010年6月18日, Xijiao Hotel, Beijing, P.R.China.
- 24 Yoshihiro Ueda, Energy method in the partial Fourier space and its application, *Seminar on Nonlinear Analysis at Okayama*, 2010年6月5日, 東京工業大学.
- 25 Yoshihiro Ueda, Half space problem for the multi-dimensional damped wave equation with nonlinear convection term, *The 11th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis*, 2010年2月22日, 北海道大学.
- 26 Yoshihiro Ueda, Application of the anti-derivative method to the half space problem for damped wave equation with non-convexity, *The 2nd GCOE International Symposium*, 2010年2月18日, 東北大学.
- 27 上田 好寛, Stability of planar stationary waves for multi-dimensional damped wave equation with nonlinear convection, *第27回九州における偏微分方程式研究集会*, 2010年1月27日, 九州大学.
- 28 Yoshihiro Ueda, Application of the anti-derivative method to the half space problem for damped wave equation with non-convex convection term, *2nd Japan-China Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics*, 2009年11月18日, 九州大学.
- 29 上田 好寛, 半空間における移流項付き消散型波動方程式の安定性解析, *NLPDE seminar*, 2009年11月13日, 大阪大学.
- 30 上田 好寛, 橋本 伊都子, 凸性を仮定しない非線形移流項を持つ消散的波動方程式の解の漸近挙動について, *日本数学会 2009年度秋季総合分科会*, 2009年9月27日, 大阪大学.
- 31 上田 好寛, Convergence rate to the nonlinear waves for viscous conservation laws on the half line, *第31回発展方程式若手セミナー*, 2009年8月31日, 国立女性教育会館.

- 32 Yoshihiro Ueda, Large time behavior of solutions to damped wave equations with convection term, WK seminar, 2009年7月21日, University of Vienna, Vienna.
- 33 Yoshihiro Ueda, Half space problem for the damped wave equation with a non-convex convection term, 7th International ISAAC Congress, 2009年7月16日, Imperial College London, UK

6. 研究組織

(1) 研究代表者

上田 好寛 (UEDA YOSHIHIRO)
神戸大学・大学院海事科学研究科・講師
研究者番号：50534856

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

(4) 研究協力者

川島 秀一 (KAWASHIMA SHUICHI)
九州大学・大学院数理学府・教授
研究者番号：70144631

中村 徹 (NAKAMURA TOHRU)
九州大学・大学院数理学府・助教
研究者番号：90432898

甲斐 伊津子 (KAI ITSUKO)
金沢大学・大学院自然科学研究科・研究協力員
研究者番号：70584639