

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 22 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21740112

研究課題名（和文） 作用素環論的量子群の研究

研究課題名（英文） Research of operator algebraic quantum groups

研究代表者

戸松 玲治 (TOMATSU REIJI)

北海道大学・大学院理学院研究院・准教授

研究者番号：70447366

研究成果の概要（和文）：A. Skalski, F. Uwe 氏と共同で Haar state が非自明な square root をもつコンパクト量子群の研究を行い，コンパクト群の場合の Diaconis-Shahshahni による先行結果をコンパクト量子群の場合に一般化した．また von Neumann 環への群作用についても研究九州大学の増田俊彦氏と共同で研究をした．とくにコンパクト群の双対の非自明な不変量をもつ作用や，Rohlin 性をもつ実数群の作用の強コサイクル共役による分類をおこなった．

研究成果の概要（英文）：I jointly work with A. Skalski and F. Uwe on a compact quantum group whose Haar state admits a non-trivial square root. Also, with Toshihiko Masuda (Kyushu university), I studied the action of the additive real group on a von Neumann algebra. We especially obtain a classification of Rohlin flows up to strong cocycle conjugacy.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：作用素環論

科研費の分科・細目：自然科学，大域解析学

キーワード：von Neumann 環，量子群，作用

1. 研究開始当初の背景

(1).

コンパクト群の場合に，idempotent state や Haar state の square root は，Kawada-Ito や Diaconis-Shahshahani らによりよく調べられていた．コンパクト量子群の場合に拡張，または，より一般的な定理を見いだせないか興味を持ち問題を考え始めた．

(2).

作用素環では群の作用を調べるのが重要である．このことは 70 年代の Connes の一連の結果から続く伝統で，離散的かつ従順な群については研究は多くの数学者により完了している．

次に問題となるのは離散性を外すことである．コンパクト群はそれ自体離散的ではないが，その双対は離散量子群となる．もちろん離散群ではないのでそれまでの分類理論

は利用できないが、それに似た現象が起きると考えられた。そこでコンパクト群の双対の作用を分類することを考えた。

(3).

(2)に引き続き、離散でない群として実数群を取り上げた。実数群はもちろん作用素環でも重要な作用を構成するものであるが、双対群も実数群である、つまり非離散であるため、離散群、離散量子群の場合の研究手法が使えないことが問題である。こうした技術的な難しさの為、これまで分類理論はあまり発展して来なかった。

2. 研究の目的

(1).

コンパクト群の場合の Diaconis と Shahshahani の定理を量子群の場合に一般化することである。つまり、Haar state が非自明な square root state を持たないことの必要十分条件は、群が可換か、あるいは四元数からできる位数 8 の群と 2 元群コピーからなる直積群（可算直積でもよい）との直積に書けることである。

これをコンパクト量子群の場合に考えるとどうなるかを明らかにすることが目的であった。

(2).

コンパクト群の双対の作用は増田俊彦氏（九州大学）と研究してきた。特に近似的内部性と中心的自由性という二つの性質をもつ作用を分類できたのは大きな成果であった。

一方で必ずしも近似的内部性や中心的自由性を持たない作用も存在する。このような場合は作用が Connes-竹崎モジュール、特性不変量と呼ばれる不変量をもつ。従順離散群の場合はこれらがなす不変量が実際にコサイクル共役についての完全不変量であることが Connes, Jones, Ocneanu, 河東-竹崎, 片山-Sutherland-竹崎によって示されている。

そこでコンパクト群の双対についても不変量が自明でない作用を扱い、分類することを目的とした。コンパクト群の双対の作用を考える主な理由は、竹崎の双対定理を経由してコンパクト群の作用の分類を行うこととほぼ同等であるということである。

(3).

離散群やコンパクト群のように離散性を利用できる対象とは異なり、双対群も連続群である実数群の作用(以下 flow と呼ぶ)の解析

はしばしば困難を伴う。これまでに得られている先行研究でコサイクル共役による一意性が示されているのは、Connes-Haagerup による、単射的 III₁ 型因子環の一意性、つまり単射的 II_∞ 型因子環上のトレースをスケールする作用の分類、または河東による単射的 III 型因子環上の flow で Cartan 部分環を固定し、かつ Connes スペクトルが full であるの研究ぐらい本質的な発展はなかった。(Hui が III 型で Connes スペクトルが自明な場合、青井-山ノ内が上記河東の結果の III 型の場合への一般化もある。)

一方で、C*環上の flow の研究は岸本により強力に推し進められた。特に彼は flow に対して「Rohlin 性」と呼ばれる概念を導入し、具体的な flow の分類結果を含む基礎的な理論を作り上げた。岸本の Rohlin 性は、川室により有限 von Neumann 環に対して導入され 1 次コサイクル消滅が示されるなど、von Neumann 環論でもその重要性が示唆されていた。

我々は一般の von Neumann 環上の flow, あるいは Borel コサイクル作用について Rohlin 性を導入、分類することを目的とした。また、これまでの先行研究を別の角度からとらえることができないかも考察することにした。

3. 研究の方法

(1).

冪零な汎関数を有限個の既約表現の関数成分に台をもつ汎関数に制限するとまた冪零であること。また、Haar state を少しだけ摂動しても正定値であることを用いた。また、Diaconis-Shahshahani による、「冪零元を持たない単位的環の idempotent は central である」という定理も用いた。

(2).

コンパクト群の双対の作用を研究するに当たって、次のように場合に分けた。

1. その作用が中心的自由である。
2. その作用は中心的自明な部分をもつが、その自明な部分は既約表現全体のなす集合の中で正規である。
3. 中心的自明な部分が正規とは限らない。

まず 1 のタイプの作用については、Connes-竹崎モジュールをもつことをまず示した。これは接合積の core の上に外部的作用を引き起こすことから確認できる。しかしこの場合、過去に利用してきた model 作用を分離する方

法はうまくいかない。これは量子群の作用のテンソル積を考えられないことに起因する難点である。そこで、環が単射的な場合には Connes-竹崎モジュール写像の群準同型による切断が取れる、という Sutherland-竹崎の結果を用いる。

すると元の作用にその切断の逆写像を合成したものは作用ではないが、近似的に内部的となる。これからユニタリの族で近似するものを取ってこられるが、重要なことはこれらが中心列環の上にコサイクル作用を引き起こす、という点である。

さらにもとの作用が中心的自由であるためこのコサイクル作用も中心的自由であることが示される。つまりこれは Rohlin 性を持ち、2 次コサイクルを消すことができる。このことを利用すると、もとの Connes-竹崎モジュールが等しい 2 つの作用を Evans-岸本の intertwining argument により結びつけることができる。

次に 2 のタイプであるが、この場合は中心的自明なパートで既約表現のなす空間を割ると従順離散群ができる。Sector の理論を経由すると、元の作用は接合積の core において、ユニタリから来る写像と元の環の自己同型の合成として書かれることが分かる。この自己同型は上述の商群を factor する。とくにこれはある種の G-kernel と見なすことができ、不変量として 3 次コサイクルが出てくる。実はこの 3 次コサイクルが離散群作用の場合の特性不変量に実質的に等価であることが分かる。そこでまずその G-kernel の分類を行った。その次にうまくユニタリ部分とつなげることにより、作用の分類を完了した。

最後に 3 のタイプであるが、完全には出来ていない。ただこれまでの研究の歴史から見て、接合積の core と、その上に双対流を考えることが重要であることは分かっている。より詳しく述べると、接合積の core の中で元の環の core を実現しておき、相対可換子環を取ると、双対流だけでなく、コンパクト群の反双対 (opposite quantum group) の作用を構成できる。これを各既約成分の上で見ると、Connes-竹崎モジュールと特性不変量を与えることは容易である。よってこの共変系が完全不変量のはずであるが、これを示すにまだ至っていない。

(3).

実数群の作用については、まず Borel コサイクル作用を考えることが必要である。これは二つの flow を見比べるとき、有限個の時間パラメータの上でユニタリ摂動を加えるのが自然であるが、そのユニタリ達を連続な

path で結び、かつその有限個の時間の間のところでも摂動がよい近似となっていることを要請しなくてはならないからである。これは無限テンソル積型の因子環で、ある特殊なもの以外においては正しいのかどうかはまだ判明していない。連続性を放棄する代わりに、技術的には複雑になってしまうが、Borel な Path でとっておけば、そのような摂動は可能である。

もちろんそうして得られたものは flow ではなく、2 次コサイクルがついたコサイクル作用である。そのため、まず実数群のコサイクル作用の 2 次コサイクルを消すことが肝要である。それには flow にならなくて Borel コサイクル作用に対して Rohlin 性を導入しなくてはならない。まず、ノルム有界列に帯する同程度連続性を、測度論の Lusin の定理を用いて導入する。そしてそれらのなす環が、自明列からなるイデアルで割れば実際に von Neumann 環となることを示す。

次に Rohlin 性を導入して、後は Shapiro の補題を使えばできるのだが、ここで少し注意が必要である。まず我々の設定が、因子環ではなく、一般の von Neumann 環であることから、中心列環のトレースは Borel コサイクル作用に対して不変とは限らない。そこで、始めの Borel コサイクル作用は、中心環においてエルゴード的かつ、その離散スペクトルが full でないと仮定する。すると、簡単な観察から Shapiro の補題を利用できることが分かる。あとは旧来の方法を使って 2 次コサイクルを消し、Evans-岸本の intertwining argumente により二つの flow を結びつけることができる。

4. 研究成果

以下に主定理を述べる。

(1).

定理 1 (Franz-Skalski-Tomatsu).
コンパクト量子群の Haar state が非自明な square root をもつことの必要十分条件は、そのコンパクト量子群が畳み込み積について冪零な有界 hermitian 汎関数を有することである。

定理 2. (Franz-Skalski-Tomatsu).
量子 DS 系であるコンパクト量子群は Kac 型である。

定理 3. (Franz-Skalski-Tomatsu).
量子 DS 系であるコンパクト量子群の既約表現は 1 次元か 2 次元である。

定理 4. (Franz-Skalski-Tomatsu).
量子 DS 系である有限次元コンパクト量子群

の次元は 8 の倍数である.

これらの結果から Diaconis-Shahshahni による先行研究を系として導くことが出来る.

(2).

定理 1. (Masuda-Tomatsu)

M を単射的な von Neumann 環, a, b を離散 Kac 型量子群の作用とする. それらが中心的自由であると仮定する. するとそれらが強コサイクル共役であるための必要十分条件は a, b の Connes-竹崎モジュールが一致することである.

定理 2. (Masuda-Tomatsu)

M を単射的な von Neumann 環, a, b を離散 Kac 型量子群の作用とする. それらの中心的自明なパートが一致し, 既約表現の空間において正規であると仮定する. するとそれらが強コサイクル共役であるための必要十分条件は a, b の Connes-竹崎モジュールが一致し, かつ対応する 3 次コサイクル, そしてモジュラー不変量も一致することである.

(3).

定理 1. (Masuda-Tomatsu)

Von Neumann 環 M への二つの Rohlin 性をもつ flow a, b があるとする. それらは中心環の上でエルゴード的かつ, 離散スペクトルは full でないと仮定する. するとそれらが強コサイクル共役であるための必要十分条件は, 各時間においてそれらの自己同型の差が近似的に内部的なことである.

この結果は現在知られている flow の分類で最良のものである. Rohlin 性をもつ flow の研究はこれからも重要になっていくであろう. それはこれまでに知られている重要な結果を全く別の方法で統一的に解くことができるからである. 例えば, 次の諸結果などが従う.

定理 2. (Connes-Krieger-Haagerup)

Flow of weights は III 型 von Neumann 因子環の同型に関する完全不変量である.

定理 3. (河東)

単射的 III 型因子環の上に, Cartan 部分環を固定し, かつ Connes スペクトルが full な flow があれば, そのような flow はコサイクル共役を除き一つしかない.

定理 4. (Connes)

すべての III₀ 型因子環のモジュラー自己同型は近似的に内部的である. 特に full 因子環ではない.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

U. Franz, A. Skalski, R. Tomatsu,

題目 「On Square Roots of the Haar State on Compact Quantum Groups」,

the Journal of Pure and Applied Algebra
Volume 216, Issue 10, October 2012, Pages
2079-2093

[学会発表] (計 4 件)

題目, 研究会名, 場所, 日付:

1. R. Tomatsu,

「Classification of actions of discrete amenable Kac algebras on von Neumann algebras」

Conference on von Neumann algebras and Related Topics, RIMS, Kyoto University, (Kyoto city)

2012 年 1 月 12 日

2. R. Tomatsu,

「Kac 型従順離散量子群の従順因子環への作用の分類」

日本数学会, 名古屋大学(名古屋市),

2010 年 9 月 24 日.

3. R. Tomatsu,

「Classification of actions of discrete amenable Kac algebras on von Neumann algebras」

実函数論関数解析学合同シンポジウム, 東京理科大学野田キャンパス(野田市),

2010 年 8 月 2 日.

4. R. Tomatsu,

「Classification of actions of discrete amenable Kac algebras on von Neumann algebras」

Non-commutative Harmonic Analysis with Applications to Probability, Będlewo(Poland),

2009 年 8 月 21 日

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~toma>

tsu/index.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

戸松 玲治 (TOMATSU REIJI)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：70447366

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし