様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　６月１日現在

機関番号：１１２０１
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2009～2011
課題番号：21740113
研究課題名（和文）　非線形偏微分方程式に現れる界面運動の研究

研究課題名（英文）　Study on interfacial phenomena in nonlinear partial differential equations

研究代表者
奈良　光紀（NARA MITSUNORI）
岩手大学・人文社会科学部・准教授
研究者番号：９０５１２１６１

研究成果の概要（和文）：本研究では、双安定型の非線形項を持つ反応拡散型方程式に現れる界面運動ついて、特に平面波(planar wave)の漸近安定性の解析と、平面的な形状を持つフロント解の時間漸近挙動の解析を行った。従来の研究結果を改善するとともに、新たに平均曲率流方程式を用いた界面運動の近似定理を示した。また、平均曲率流方程式による非有界超曲面の運動について、進行波としての超平面の漸近安定性を考察した。

研究成果の概要（英文）：In this study, we analyzed the asymptotic stability of planar waves and the large time behavior of disturbed planar fronts that appear in a reaction diffusion equation with bistable type nonlinearity. We improved some previous results and showed the approximation theorem for the large time behavior of planar fronts based on the mean curvature flow. The motion of hypersurfaces governed by the mean curvature flow was also studied, and some sufficient conditions for the asymptotic stability of hyperplanes as traveling wave solutions were shown.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	900,000	270,000	1170,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	1900,000	570,000	2470,000

研究分野：　非線形解析
科研費の分科・細目：　数学・大域解析学
キーワード：　関数方程式論

１．研究開始当初の背景

非線形偏微分方程式における界面現象は物理学や生物学への応用上の観点からも意義深いテーマであり、従来から広く研究されている。「界面(interface)」とは、ある種の非線形現象において観察される、相異なる複数の状態を分ける相境界であり、これが複雑な空間パターンの形成に大きな役割を演じる。界面はしばしば、「進行波」という形で媒質中を移動し、系の状態変化を周囲に伝達する役割を担う。こうした界面の形成プロセスとその後の発展過程を明らかにすることは、多くの複雑な非線形現象を理解する上での鍵となる。

特に、双安定型(bistable type)の非線形項を持つ反応拡散方程式(reaction diffusion equation)に現れる界面運動の解析、平均曲率流方程式(mean curvature flow)に支配される超曲面の運動の解析は、その代表的なテーマとして広く研究されている。

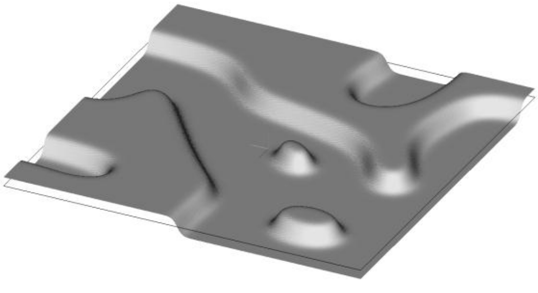

図１．双安定型反応拡散方程式に現れる界面運動の数値計算例

（１）平均曲率流方程式に関する研究

平均曲率流方程式は、超曲面の発展方程式の代表例であり、非線形現象に現れる幾何学的パターンの運動を表現する理論モデルとして、長い研究の歴史がある。特に、閉超曲面や有界領域で境界条件を伴う超曲面を扱った研究は数多い。一方で、全空間に広がる非有界超曲面の運動・進行波の存在と安定性は、未だ解明されていない部分が多く、その理論的解明は重要である。非有界超曲面の運動に関連する研究としては、Brazhnik('96)、二宮－谷口('00)による、平面曲線の曲率流運動における進行波の分類がある。二宮－谷口('01)は、この問題に現れるＶ字型進行波の漸近安定性を解析した。また、Ecker－Huisken('89)はｎ次元超曲面の平均曲率流運動における拡大自己相似解の存在とその漸近安定性を示した。これらの結果では、遠方で減衰する初期擾乱に対する進行波の漸近安定性（摂動された解の進行波への収束）が主に議論されている。

（２）双安定型反応拡散方程式に関する研究

双安定型の非線形項をもつ反応拡散方程式では、２つの安定定常状態を隔てる相境界として界面が生じ、ときに進行波として空間内を伝播する。空間１次元の問題に現れる進行波は古くから研究されており、Fife－McLeod('77)、Chen('97)が良く知られている。しかし、空間多次元の問題では、界面の空間的な広がり、幾何学的形状を考慮する必要があり、空間１次元の場合とは本質的に異なる部分がある。空間多次元での界面運動に関する先行研究としては、Fife('88)、二宮－谷口('05)、Hamel－Monneau－Roquejoffre('05)等が挙げられる。これらの研究では、Ｖ字型進行波や円錐型進行波の存在が示されている。また、二宮－谷口('06)は、これらの進行波の漸近安定性をある程度まで解明した。更に、平面波(planar wave)の漸近安定性に関しては、Levermore－Xin('92)、Xin('92)、Kapitula('97)等の結果があるが、いずれも初期擾乱が十分小さいことを仮定している。

２．研究の目的

申請時における本研究の主要なテーマは以下の２つである。

（１）平均曲率流方程式に支配される曲線や(超)曲面の運動の定性的研究

（２）双安定型非線形項をもつ反応拡散方程式に現れる界面ダイナミクスの研究

（１）に関しては、全空間に広がる曲線・(超)曲面の運動に焦点を絞り、時間漸近挙動の解析や進行波の安定性を解明することを具体的な研究テーマとした。特に、空間の非有界性に起因する複雑な解の挙動を明らかにするため、空間無限遠方で減衰するとは限らない初期擾乱に対する進行波の漸近安定性を解析することを主な目的とした。

（２）に関しては、空間多次元の Allen-Cahn 方程式における進行波の安定性・解の時間漸近挙動の解析を具体的な研究テーマとした。特に、これまでの研究で得られた平均曲率流方程式に関する解析手法・解析結果を応用して、平面波(planar wave)の漸近安定性に関して、従来の結果を拡張することを主な目的とした。

３．研究の方法

研究遂行の具体的な手法は、非線形偏微分方程式に関する種々の解析的手法を基にした理論的研究、および数値計算によるシミュレーションである。

研究活動においては、東京工業大学の谷口雅治氏、東京大学の俣野博氏との共同研究を行った。俣野博氏との共同研究により、無限次元力学系の理論を応用する手法を取り入れ、従来の研究成果を大幅に改良することに成功した。このような研究の進行状況から、上記（２）の研究テーマを（１）に優先し、多くの時間を費やした。

また、研究途上で得られた成果を海外の研究集会で発表する機会を数回持ったが、これをきっかけとして、フランスの研究者との共同研究を開始することになった。特に、上記（２）のテーマに関連した新たな具体的課題として、フランスの D. Hilhorst 氏と減衰型波動方程式の特異極限問題に取り組んだ。これに関連して、2010 年 2 月及び 2011 年 2 月にフランスに渡航し、パリ南大学にて研究討議を行った。

４．研究成果

Allen-Cahn 方程式に現れる界面運動、特に平面波の安定性と解の時間漸近挙動の解

析に関しては、ほぼ当初の研究計画通りに研究が進み、多くの結果を得た。

まず、文献①では、空間無限遠方で減衰し、かつ必ずしも小さくない初期擾乱に対して、平面波が漸近安定であることを示した。また、特別な場合について、その収束レートを示した。これは、従来の関連研究の結果を大幅に拡張するものである。また、空間無限遠方で減衰するとは限らない初期擾乱の特別な場合として、空間的に概周期的な場合を考察した。更に、線形熱方程式及び曲率流方程式に関して既に得られていた結果を応用し、平面波が漸近安定とならないような有界な摂動の例を示した。証明は、放物型方程式の解の比較定理に基づき、優解と劣解を構成する手法による。これらの結果は、谷口雅治氏、俣野博氏との共同研究による。

また、文献②では、文献①で発表した研究内容を更に発展させ、Allen-Cahn 方程式において、平面的な形状を持つフロント状の解の時間漸近挙動が、平均曲率流方程式によって、時刻無限大まで近似可能であることを示した。無限次元力学系の概念を導入して、解の各種の評価式を導き、優解・劣解を精密に構成することで証明を行った。更に、得られた近似定理を用いて、空間的にエルゴート的な初期擾乱に対する平面波の漸近安定性を証明した。これらの結果は、俣野博氏との共同研究に基づく。

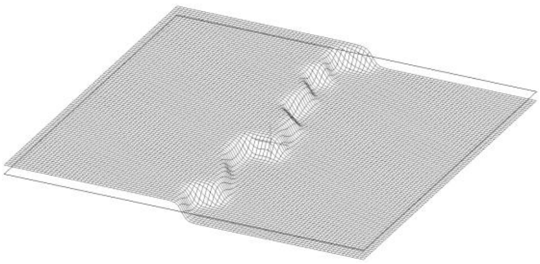

図２．平面的な形状を持つフロント解
(disturbed planar front)の例

更に、非線形偏微分方程式に現れる界面運動に関する特異極限問題について、パリ南大学の D. Hilhorst 氏と共同研究を行った。特に、双安定型の非線形項を持つ減衰型波動方程式(damped wave equation)において、減衰の効果を定めるパラメータが非常に大きい場合を考察した。このような条件下では、双曲型に分類される減衰型波動方程式の解が、放物型の偏微分方程式の解に類似した挙動を示すと考えられることから、放物型方程式と同様の界面現象が現れることを予測した。この点を詳細に解析するために、減衰型波動方程式に対して、ある種の解の比較定理が成り立つことを示した。減衰型波動方程式では、放物型方程式と異なり、比較定理の証明において、解の初期速度を考慮する必要がある。また、空間多次元での波動方程式は、空間１次元の波動方程式とは解の性質が本質的に異なる部分がある。これらの評価が比較定理の成立の鍵となることが明らかとなった。また、これらの性質を利用して界面の形成にかかる時間の評価やその後の時間発展を解析した。この研究は現在も継続中である。これらの研究は上記（２）の研究テーマに関連し、当初の研究計画に追加して、新たに取り組んだものである。減衰型波動方程式における比較定理は、放物型方程式に関する研究手法を応用する上で、非常に有効であり、今後の研究の発展の可能性を期待できるものと思われる。

上記（１）の研究テーマについては、文献②において、平均曲率流方程式に支配される非有界超曲面の運動、特に空間的にエルゴート的な初期擾乱に対する、進行波としての超平面の漸近安定性に関する結果を示した。この他の具体的研究課題としては、平均曲率流方程式と線形熱方程式の、解の時間漸近挙動の類似性の解明に取り組んだが、以前の研究で得た成果を拡張することは出来なかった。今後、継続して研究を進める予定である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① H. Matano, M. Nara
``Large time behavior of disturbed planar fronts in the Allen-Cahn equation'',
Journal of Differential Equations, Vol.251 (2011), 3522-3557, 査読有

② H. Matano, M. Nara, M. Taniguchi
``Stability of planar waves in the Allen-Cahn equation'',
Communications in Partial Differential Equations, Vol.34 (2009), 976-1002, 査読有

〔学会発表〕（計９件）

① 奈良光紀
``Allen-Cahn 方程式における解の時間漸近挙動と平面波の安定性'', 平成23 年度日本数学会東北支部会, 2012 年２月, 岩手大学

② 奈良光紀
``Allen-Cahn 方程式における解の時間漸近挙動と平面波の安定性'', 研究集会「非線形現象の数値シミュレーションと解析 2011」, 2011 年３月, 北海道大学

③ 奈良光紀
``Large time behavior of disturbed planar fronts in the Allen-Cahn equation", The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2010 年 5 月, Dresden University of Technology (ドイツ)

④ 奈良光紀
``Allen-Cahn 方程式と平均曲率流における進行波", 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会 応用数学分科会, 2009 年 9 月, 大阪大学

６．研究組織
(1)研究代表者

奈良　光紀 (NARA MITSUNORI)
岩手大学・人文社会科学部・准教授
研究者番号：90512161