

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 4 月 18 日現在

機関番号：18001

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2012

課題番号：21740118

研究課題名(和文) モノドロミ保存変形と積分表示可能な新しい特殊関数についての相補的研究

研究課題名(英文) Complementary study on monodromy preserving deformations and new special functions with integral representation

研究代表者

眞野 智行(MANO TOSHIYUKI)

琉球大学・理学部・准教授

研究者番号：60378594

研究成果の概要(和文): テータ関数の冪積の積分で記述される関数(Wirtinger 積分)の性質を調べるとともに、そこで得られた結果を基に線形微分方程式の解の大域的性質・モノドロミ保存変形の詳細な性質に関してのいくつかの研究成果を得た。

研究成果の概要(英文): We studied properties of the Wirtinger integral which is represented in terms of a definite integral of a power product of theta functions. Moreover, we obtained research results regarding global behaviors of solutions to linear differential equations and detailed properties of monodromy preserving deformations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：モノドロミ、積分表示、楕円曲線

1. 研究開始当初の背景

パンルヴェ方程式は 19 世紀に P. Painlevé により、動く特異点を持たない微分方程式の解として新しい特殊関数を発見するという問題意識の下に得られた 6 種の 2 階非線形代数的微分方程式である。その後 1907 年に R. Fuchs により、リーマン球面上 4 点の確定特異点を持つ 2 階フックス型微分方程式のモノドロミ保存変形を記述する方程式として第 6 パンルヴェ方程式が現われるという事実が発見された。これはパンルヴェ方程式の研究において、線形微分方程式の大域挙動を記述するモノドロミの問題が重要な役割を持つことを示しており重要

な発見である。現在では物理学や応用数学をも含めた様々な分野でパンルヴェ方程式が現れることが分かっており、方程式自身についても実に多様な視点からの研究が活発になされている。また同時にパンルヴェ方程式の拡張・一般化も色々なものが知られている。

上述のようにパンルヴェ方程式は複素平面上の線形微分方程式のモノドロミ保存変形から導出できるのであるが、複素平面を一般のリーマン面に取り換えてモノドロミ保存変形を考えることによりパンルヴェ方程式の一般化が構成できる。このような研究は岡

本和夫氏による楕円曲線上のモノドロミ保存変形の理論の構成をはじめとして何人かの研究者によりなされているが、従来の研究ではこのような一般化について、基本的には方程式の構成がなされるにとどまりそれ以上の具体的な研究はあまりなされていなかった。

報告者は楕円曲線上のモノドロミ保存変形から構成される非線形微分方程式について、テータ関数の冪積による積分表示(Riemann-Wirtinger 積分)を持つような特殊解が存在することを発見した。これは古典的な超幾何関数の楕円曲線上への一般化とも考えられ、それ自身が新たな特殊関数として興味深い対象であることが期待される。そこでこの Riemann-Wirtinger 積分の性質の研究とそこで得られた知見を基にしてモノドロミ保存変形についての具体的な性質の研究を行うという形で、これらの研究対象についての相補的な研究を行うこととした。

2. 研究の目的

上記 1. 研究開始当初の背景で述べたように本研究課題の開始以前に発見された対象である Wirtinger 積分を研究することと、モノドロミ保存変形の性質を調べることを相補的に遂行することが主な目的である。

- (1) モノドロミ保存変形の解の性質を詳細に調べる：主に楕円曲線上のモノドロミ保存変形の詳細な性質を調べることを目的とする。本研究以前に楕円曲線上のモノドロミ保存変形を記述する非線形微分方程式の特殊解として Riemann-Wirtinger 積分が得られているのであるが、引き続き他の具体的な性質についての研究を行う。また、通常の複素平面上のモノドロミ保存変形についても、線形微分方程式の解の大域挙動・対称性・漸近解析と関連した研究を行うことによって今後の研究の方向性を探るための知見を得ることを目的とする。
- (2) テータ関数の冪積の積分で表示される関数(Wirtinger 積分とその一般化)の性質を調べる：上述のように楕円曲線上のモノドロミ保存変形を記述する非線形微分方程式の解として Riemann-Wirtinger 積分が得られるが、その変数を楕円曲線の N 等分点に固定して上半平面の点を変数とする関数と見なした場合に、非常に対称性の高い関数が得られる。これをレベル N の Wirtinger 積分と呼ぶ。レベル N の Wirtinger 積分がみたす微分方程式

の導出およびその構造の詳細な研究を行う。

- (3) Riemann-Wirtinger 積分の一般化と応用：Riemann-Wirtinger 積分の多重積分への一般化を試みる。このような方向への一般化としては、高次元アーベル多様体上のテータ関数の多重積分を構成するものと、1次元複素トーラスのいくつかの直積を考えてその上で多重積分を構成するというものが考えられる。後者に関連して、1次元複素トーラス上の共形場理論の相関関数を記述する KZB 方程式と呼ばれる微分方程式の解がテータ関数の冪積の多重積分によって表示されることが知られており、この積分表示と Riemann-Wirtinger 積分との関係を明らかにすることは興味深い問題である。また別の方向の一般化として、不確定特異点を含むような、Riemann-Wirtinger 積分の合流型の構成等の問題も考えられる。

3. 研究の方法

本研究課題に関連する研究を行う研究者と共同研究あるいは研究連絡を密にして、互いに協力しながら研究を遂行していく。また本研究課題は対象の幅が広く、研究の進展に伴い新たな問題が派生していくことが予想されるので研究状況に対して柔軟に対応していく。研究目的の(3)については、複素トーラス上の積分論の一般論を研究課題としている北見工業大学の渡辺文彦氏と協力しながら研究を進める。互いの研究成果について頻繁に情報を交換し合いながら効率的に研究を進めていく。(1)については、(2),(3)で得られた知見を利用しながら必要に応じ他の研究者と協力して進めていく。なお本研究課題では、複雑な数式を計算していく必要があるため計算機の数式処理システムを有効に活用しながら研究を進めていく。

4. 研究成果

テータ関数の冪積の積分(Riemann-Wirtinger 積分やレベル N の Wirtinger 積分)およびモノドロミ保存変形に関して以下のような研究成果が得られた。また、それらの結果から、今後の研究の方向性を与えるいくつかの新たな知見が得られた。

- (1) テータ関数の冪積の積分で表示される関数(Riemann-Wirtinger 積分)において変

数を楕円曲線上の N 等分点に固定して周期を変数とする関数と見たものを、レベル N の Wirtinger 積分と呼ぶ。レベル N の Wirtinger 積分は一般の Riemann-Wirtinger 積分よりも多くの対称性を持つのであるが、この対称性を利用してレベル N の Wirtinger 積分が、レベル N のモジュラー曲線上に定義されたフックス型微分方程式の解になることを示した。またそのフックス型微分方程式はモジュラー曲線のカスプにおいてのみ確定特異点を持つことを示し、そこにおける特性指数の様子を具体的に記述した。なお、この結果からレベル N の Wirtinger 積分がみたす微分方程式は特性指数を分数差だけでなく変換を持つことが観察できる。通常の微分方程式は特性指数を整数差だけでなく変換しか持たないので、これは大変不思議な現象である。この現象の解明は今後の研究課題である。

- (2) 北見工業大学の渡辺文彦氏との共同研究で、Riemann-Wirtinger 積分のツイストコホモロジー論を用いた基礎付けを与えた。また、1次元複素トーラス上の共形場理論の相関関数を記述する微分方程式である KZB 方程式の解の積分表示と Riemann-Wirtinger 積分との関係を明確に与えた。これにより Riemann-Wirtinger 積分と数理論理学との関連が付くようになった。
- (3) q 差分第 6 パンルヴェ方程式について、線形 q 差分方程式の接続保存変形としての定式化を利用して、一般解の境界点のまわりでの漸近挙動を記述した。さらに q 差分第 6 パンルヴェ方程式の解に対する接続問題の解答を与えた。非線形 q 差分方程式の解の解析的性質および大域挙動の研究はあまり多くないので、これは興味深い結果であると思われる。
- (4) 三重大学の川向洋之氏との共同研究で、3 階以上の線形微分方程式の特異点の合流に伴うモノドロミ保存変形の退化についての現象を明らかにし、その応用としてガルニエ系の離散化の記述を与えた。また、そのように構成された離散ガルニエ系についていくつかの特殊解を与えた。
- (5) 琉球大学の加藤満生氏との共同研究で、有限複素鏡映群をモノドロミ群にもつ 3 階パッフ系から第 6 パンルヴェ方程式の代数解のうちいくつかについての導出を行った。このような 3 階パッフ系の特異点集合は自由因子と呼ばれるものにな

っているが、パンルヴェ方程式の代数解の記述になぜ自由因子が現れるかは今のところ不明であり、逆にパンルヴェ方程式の任意の代数解から出発して自由因子に特異点集合を持つパッフ系が構成できるかといった問題が今後の研究課題として興味深いものである。

- (6) 2 階線形微分方程式の一般シュレジンガー変換がパデ近似を用いて記述されることを明らかにし、ガルニエ系の一般解の行列式構造を導出した。その応用として超幾何解の行列式表示を与えた。この構成を 3 階以上の高階線形微分方程式のシュレジンガー変換に対して一般化することは興味深い問題である。使われる近似理論がパデ近似からより一般のものに変わることが予想される。これは直交多項式や連分数展開の一般化とも関わりがあり、極めて興味深い問題を提示する視点であるように思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

- 1 Toshiyuki Mano, On a generalization of Wirtinger's integral, Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, Vol.66, No.2, 2012, pp.435-447
- 2 Toshiyuki Mano and Humihiko Watanabe, Twisted cohomology and homology groups associated to the Riemann-Wirtinger integral, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, Vol.140, 2012, pp.3867-3881
- 3 Toshiyuki Mano, Determinant formula for solutions of the Garnier system and Pade approximation, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 査読有, Vol.45, 2012, doi:10.1088/1751-8113/45/13/135206
- 4 Toshiyuki Mano, Monodromy preserving deformation of linear differential equations on a rational nodal curve, Kumamoto Journal of Mathematics, 査読有, Vol.24, 2011, pp.1-32
- 5 Toshiyuki Mano, Asymptotic behavior around a boundary point of the q -Painleve VI equation and its connection problem, Nonlinearity, 査読有, Vol.23, 2010, pp.1585-1608
- 6 Toshiyuki Mano, Studies on monodromy preserving deformation of linear

differential equations on elliptic curves,
Journal of Mathematical Physics, 査読有,
Vol.50, 2009,
DOI: 10.1063/1.3204973

〔学会発表〕(計 10 件)

1 眞野智行、加藤満生、Algebraic Painleve
VI solutions derived from differential
equations on C3、超幾何方程式研究会 2013、
2013 年 1 月 6 日、神戸大学

2 眞野智行、Algebraic Painleve VI
solutions derived from free divisors in C3
II、Workshop on Free Divisors and
Differential Equations、2012 年 11 月 9 日、
東京農工大学

3 眞野智行、ガルニエ系の解の行列式公式
とパデ近似、日本数学会秋季総合分科会、
2011 年 9 月 30 日、信州大学

4 眞野智行、モノドロミ保存変形とパデ近
似、南九州代数系集会、2011 年 8 月 26 日、
鹿児島大学

5 眞野智行、川向洋之、高階線形微分方程
式の合流操作とモノドロミ保存変形の退化、
Workshop on Accessory Parameters、2010 年
10 月 11 日、東京大学玉原国際セミナーハウ
ス

6 眞野智行、川向洋之、高階線形微分方程
式の豪州操作とモノドロミ保存変形の退化、
日本数学会秋季総合分科会、2010 年 9 月 24
日、名古屋大学

7 眞野智行、一般 Wirtinger 積分から得ら
れるフックス型方程式のスペクトルデータ
について、アクセサリー・パラメーター研究
会、2010 年 3 月 17 日、熊本大学

8 眞野智行、Riemann-Wirtinger 積分とその
応用、微分方程式の総合的研究、2009 年 12
月 18 日、東京大学

9 眞野智行、q-PVI 系の境界点における漸近
挙動と接続問題、日本数学会秋季総合分科会、
2009 年 9 月 25 日、大阪大学

10 Toshiyuki Mano、The Riemann-Wirtinger
integral and its application、Third
International Conference on Geometry and
Quantization GEOQUANT、2009 年 9 月 11 日、
University of Luxembourg

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：

国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

眞野 智行 (MANO TOSHIYUKI)
琉球大学・理学部・准教授
研究者番号：60378594