

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 17 日現在

機関番号：14403

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2012

課題番号：21740119

研究課題名（和文） 作用素環上の離散群作用と不変量の研究

研究課題名（英文） Actions of discrete groups on operator algebras and their invariants

研究代表者

岡安 類 (OKAYASU RUI)

大阪教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：70362746

研究成果の概要（和文）：

作用素環のエントロピーの研究を行った。

- (1) Lin によって定義された TAF 環に対して、自己同型写像のエントロピーを Voiculescu の方法に従って新しく定義し、そのエントロピーの性質や例について研究を行った。
- (2) Pimsner と Popa によって定義された作用素環とその部分環の組に対する相対エントロピーと M. Choda によって定義された 2 つの部分環の組に対する相対エントロピーの研究を行った。

研究成果の概要（英文）：

I study some entropy on operator algebras.

- (1) By using the method of Voiculescu, I define new entropy for an automorphism on a TAF algebra, which is defined by Lin, and study their properties and examples.
- (2) I study the relative entropy for a pair of an operator algebra and a subalgebra, which is defined by Pimsner and Popa. I also study the relative entropy for a pair of two subalgebras, which is defined by M. Choda.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：作用素環

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：作用素環、エントロピー、離散群、自己同型写像

1. 研究開始当初の背景

作用素環は考える位相に応じて C^* 環と von Neumann 環の 2 種類に大別される。可換 C^* 環は適当なコンパクトハウスドルフ空間上の連続関数環と同型であり、可換 von Neumann 環は適当な測度空間上の本質的有界関数環と同型になる。したがって、作用素環は非可換なトポロジー及び非可換な測度論と言われる。以上のことから作用素環において、可換な場合の結果を非可換の場合に拡張することは自然であり、実際、多くの数学者によって行われてきた。本研究はその中のひとつであるエントロピーについて焦点を当てる。

ある位相空間または測度空間上の自己同型写像に対して、それぞれ位相的エントロピーまたは測度論的エントロピーが知られている。これは自己同型写像に対する不変量であり、例えば与えられた複数の自己同型写像を区別するために用いられ、これらは大変重要な研究対象である。

一方、空間上の自己同型写像から対応する空間の関数環上の自己同型写像が自然に導入できる。したがって、非可換な作用素環上の自己同型写像に対してもエントロピーを定義したいと考えるのは自然であり、与えられた自己同型写像を区別するために導入したい概念である。しかし非可換な設定において、エントロピーをどのように定義できるかは作用素環では長く問題とされていた。現在では、様々な視点から多くの拡張されたエントロピーが作用素環上で定義されているが、本研究は主に、

(1) Voiculescu によって定義された摂動理論的エントロピー、(2) Pimsner-Popa によって定義された相対的エントロピー、(3) Voiculescu の方法を用いて Lin の定義した TAF 環上の自己同型写像に対するトレース位相近似的エントロピーについて研究を行った。

2. 研究の目的

(1) 摂動理論的エントロピー

Voiculescu の作用素論における摂動理論を使って定義される。計算が大変困難であるため、あまりまとまった結果が得られておらず、Voiculescu による可換な場合と私による自由群

の無限遠境界作用以外には計算例がない。しかし、他のエントロピーと違って自己同型写像の族に対しても定義できるため、例えば有限生成群の作用に対しても考えることができるなどのメリットがある。

(2) 相対的エントロピー

Pimsner-Popa によって定義された von Neumann 環の組に対して定義されるもので、特に部分因子環論において目覚ましい応用結果がある。(因子環とは中心が自明な von Neumann 環であり、部分因子環論とは因子環とその部分因子環の組を研究対象とする。)しかし、因子環をひとつ固定し、その 2 つの部分因子環の組に対するエントロピーの結果は知られていない。

(3) トレース位相近似的エントロピー

Voiculescu は多くのエントロピーを定義しているが、AF 環 (有限次元部分環で近似できる C^* 環) 上の自己同型写像のエントロピーの拡張を考える。 C^* 環の分類理論において、Lin は AF 環の拡張として TAF 環を定義し分類理論に大きく貢献した。そこで TAF 環上の自己同型写像にエントロピーの定義を拡張して諸性質について研究を行う。AF 環は比較的狭いクラスの C^* 環であったが、TAF 環に拡張することで、より広いクラスの C^* 環上の自己同型写像のエントロピーを考えることができる。例えば、無理数回転環などが挙げられる。

3. 研究の方法

多くの先駆的な結果をもう一度見直す作業を行い、関連する研究者とメールなどのやり取りを行い情報の収集を行う。

また、国内外のセミナーや研究集会に参加し、多くの専門家の人達と積極的な接触により、有益な情報の収集や議論により研究を進めてきた。

4. 研究成果

Pimsner-Popa によって定義された von Neumann 環とその部分環の組に対する相対的エントロピーを M. Choda は 2 つの部分環の組に対して考えた。主に任意の有限 von

Neumann 環の可換な有限次元部分環の組についてのエントロピーの計算を行った。これらは行列環とその極大可換環の組に対する Choda の結果の一般化である。また、その副産物として Popa の意味での直交性の特徴付を行うことができた。これは可換性が本質的であり、非可換な設定で有限次元の場合でも反例があることが確かめられた。

また、同様の有限 von Neumann 環の可換な有限次元部分環の組について Pimsner-Popa によって定義された不変量についても計算を行った。Pimsner-Popa の不変量の計算は容易ではなく、行列環とその部分環の組に関しては Pimsner-Popa が大変複雑な計算を行っている。本研究では行列環の 2 つの可換な部分環に関して計算を行った。こちらの計算でも可換性が重要であり、一般の非可換な設定では、例え有限次元であってもどうなるかはよくわかっていない。

Lin によって与えられた TAF 環上の自己同型写像に関するエントロピーを Voiculescu の方法で新たに定義を与え、期待される諸性質についての結果が得られた。例えば、行列環の無限テンソル積上の非可換ベルヌーイシフトは今まで知られているエントロピーと同様の値が得られる。代表例として、無理数回転環上の非可換 CAT 写像について考察した。ある技術的な条件下で既に知られている他のエントロピーと同様の評価が得られた。また Lin-Phillips によって、無限コンパクト距離空間で有限被覆次元をもつ極小同相写像から作られる接合積 C^* 環は TAF 環となり、適用できる例であることがわかっている。よって、もとの極小同相写像の可換の場合である古典的なエントロピーと、より大きな非可換な C^* 環の内部自己同型写像とみてエントロピーを考える場合で同じ値が得られることが期待されるが、残念ながら不等式の評価のみしか得られなかった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① Rui Okayasu: "Entropy for C^* -algebras with tracial rank zero", *Proceedings of the American Mathematical Society* **138**. 3609-3621 (2010), 1
- ② Rui Okayasu: "Relative entropy for abelian subalgebras", *International Journal of Mathematics* **21**. 537-550 (2010), 1

[学会発表] (計 9 件)

- ① 「Entropy for C^* -algebras with tracial rank zero」, 日本数学会函数解析学分会, 名古屋大学, 2010 年 9 月
- ② 「Tracial topological approximation entropy」, 作用素論・作用素環論研究集会, 東京理科大学森戸記念館, 2010 年 11 月.
- ③ 「On the Toeplitz algebras of quasi-lattice ordered groups」, 共同研究「作用素環の対称性の研究」, 京都大学数理解析研究所, 2011 年 1 月.
- ④ 「Free group C^* -algebras associated with ℓ_p 」, 京都作用素環セミナー, 京都大学数理解析研究所, 2012 年 4 月.
- ⑤ 「Free group C^* -algebras associated with ℓ_p 」, Great Plains Operator Theory Symposium, University of Houston (アメリカ合衆国), 2012 年 5 月.
- ⑥ 「Free group C^* -algebras associated with ℓ_p 」, Workshop on Semiprojective C^* -Algebras, University of Copenhagen (デンマーク), 2012 年 9 月.
- ⑦ 「Free group C^* -algebras associated with ℓ_p 」, 日本数学会函数解析学分会, 九州大学, 2012 年 9 月.
- ⑧ 「Free group C^* -algebras associated with ℓ_p 」, 研究集会「作用素環論の最近の発展と関連する話題について」, 京都大学数理解析研究所, 2012 年 9 月.

- ⑨ 「Free group C*-algebras associated with ℓ_p 」,
Harmonic analysis, operator algebras and representations, CIRM
(フランス), 2012年10月.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

○出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~rui/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡安 類 (OKAYASU RUI)
大阪教育大学・教育学部・准教授
研究者番号: 70362746