

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月14日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740120

研究課題名（和文） ベクトル値の状態分布関数で記述される自由境界問題の研究

研究課題名（英文） Free boundary problems described by vectorial order parameters

研究代表者

白川 健（SHIRAKAWA KEN）

千葉大学・教育学部・准教授

研究者番号：50349809

研究成果の概要（和文）： 本助成期間では「固体・液体相転移」および「薄膜磁性体」に現れる自由境界問題を対象に、申請段階からの主目的であった自由境界の幾何学的構造の解明について、多くの研究成果を報告することができた。特に固体・液体相転移の分野では「最適制御」という発展的課題へ研究を進展させたばかりでなく、その数値計算による検証実験にまで考察が及んだ点は、当初計画の予想を上回る期待以上の研究成果として評価することができる。

研究成果の概要（英文）： The objective in this study is to understand the deformation process of free boundaries from variational and geometric viewpoint. To this end, some free boundary problems appearing in two phenomena: “solid-liquid phase transition”; “ferromagnetic thin film”; were dealt with. On that basis, various study results were reported during the research period. Especially, it will be notable that some obtained results are concerned with more advanced themes than originally expected: “optimal control problem”; “numerical experiments for optimal controls”.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形現象，自由境界問題，ベクトル値の相関数，変分学，安定性，幾何学的構造
固体・液体相転移，薄膜磁性体

1. 研究開始当初の背景

物質の溶解・凝固現象や形状記憶現象などのように、先端科学技術で応用されている自然現象ではしばしば2つの異なる物理状況が共存する状況が現れる。こうした異なる物理状況の境界を自由境界と呼ぶ。

自由境界の時間的・空間的变化はしばしば「相関数」と呼ばれる物質の状態分布を表す関数で記述される。相関数の数学的表現は、

現象によってスカラー関数またはベクトル関数で与えられるが、中でも形状記憶合金や磁性体などの応用上重要な現象においては、その数学的表現がベクトル関数によって表される事が多い。

それにも関わらず、ベクトル関数で記述される自由境界問題の形成プロセスに関しては、スカラー関数の場合に比べて研究報告例が少ないのが現状である。

このような背景から本研究は、ベクトル関数が再現する自由境界のダイナミクスの追及に狙いを定め、計画されたものである。

2. 研究の目的

研究代表者のこれまでに扱ってきた研究内容は、その多くがスカラー関数によって表される自由境界問題であった。これに対して本研究における主目的は、これまでに培ってきたスカラー関数での解析手法を発展させ、更にこれを基にベクトル関数特有の状況にも対応可能な新しい数学理論を構築することである。

上記の研究目的に基づき、代表者は以下3つを本研究における具体的な研究課題として設定した。

(1) 自由境界を支配する変分不等式の考察

ベクトル値の相関数で記述される自由境界問題を抽象ヒルベルト空間上の変分不等式で捉え直し、支配エネルギーの第1変分の表現に焦点を当てた考察を行う。その上で、考察する自由境界がそもそも数学的取り扱い可能であるかどうかという根本的な問題(数学モデルの適切性)に関して数学理論による確実な保障を与える。

(2) 自由境界の構造の幾何学的考察

自由境界の形状決定には、多くの場合、結晶などの物質固有の微視的構造が反映される。数学的には、これは現象の支配エネルギーの表現の相違そのものであると考えられる。本研究では、エネルギー密度の表現をさまざまにとる事によって、対応する自由境界の形状を、幾何学的手法を用いて具体的に示す。

(3) 数値計算による数学理論の再検証

現象の数学モデルに基づいた数値シミュレーションを行い、上記(1)(2)の研究内容を数学理論と異なる角度から再検証する。また、自由境界が極限の状況へ到達するプロセスについても、数値実験的立場からの考察を与える。

3. 研究の方法

本研究の課題遂行には、主テーマである「自由境界問題」の他にも「幾何学的測度論」「非線形解析学」「変分学」「数値解析」など、近年の進展が著しい多方面の分野をバランスよく取り入れる必要がある。従って、研究を効率的に進めるためには上記の分野の最新の動向を常にチェックできるような、情報収集環境を整備する事が重要となる。このため、関連図書の補充はもちろんの事ながら、国内外の研究集会へは定期的に参加できるような予算配分を行った。

他にも、本研究では代表者の専門外の研究分野の知識や技術の補助も必要となったため、国内外より以下3名の研究者に「研究協力者」としてのサポートを依頼した。

(1) Stefanelli, Ulisse (イタリア学術研究会議・研究員)

本研究における役割は、自由境界の変分不等式による数理モデル化に関する専門知識の提供である

(2) Hadiji, Rejeb (パリ東大学・教授)

本研究における役割は、自由境界の変分構造の解析に関する専門的知識の提供である。

(3) 高野 辰之 (関東学院大学・助手)

本研究に役割は、数値計算作業に対する技術的サポートである。

4. 研究成果

以下では、本科学研究費の助成期間において得られた研究成果について、年度を遡って説明する。

助成期間1年目(2009年度)では、エネルギー汎関数の独立変数(相関数)がベクトル値のケースとスカラー値のケースの両方を考え、そのそれぞれにおいて以下(1)~(2)の研究成果を報告した。

(1) ベクトル値のケース

ベクトル値関数を変数とする全変動汎関数によるエネルギーに注目し、制約条件が付いた状況での固有値型問題について考察した。結論として、設定がベクトル値とスカラー値のケースではエネルギーの変分構造や再現される自由境界に以下のような共通点および相違点がある事を明らかにした。

①(共通点)固有値型問題の解によって再現される自由境界の幾何学的構造は、スカラー値の設定でもベクトル値の設定でも基本構造は同様である。

②(共通点)自由境界は、相関数の値の符号が反転する(方向が逆転する)所に現れやすい。

③(相違点)変分構造の解析において、スカラー値の設定での証明法の一部が、ベクトル値の設定では通用しない。これはベクトルが複数の成分を持つ所に起因しており、結果としてスカラー値のケースでは必要十分であった主張が、ベクトル値のケースでは充分性の主張を証明するのみに止まっている。

(2) スカラー値のケース

スカラー関数を変数とする全変動汎関数に対して、異方性の効果を取り入れるなどの様々な設定を取り入れ、それぞれの設定において生成される Allen-Cahn 型方程式について、以下2つの成果を得た。

- ① どの設定においても、「比較性原理」などの力学系の支配法則は、基本的に同様な形で成立する事を明らかにした。
- ② 各設定において対応する Allen-Cahn 方程式が再現する自由境界を考察し、物質の異方性を考慮する設定と考慮しない設定（等方的な設定）との間で自由境界の幾何構造にどのような相違が現れるのかを明らかにした。

助成期間2年目(2010年度)では、ベクトル値の相関数で記述される自由境界問題の分野における「固体・液体相転移」と「薄膜磁性体」の2つのテーマを扱い、そのそれぞれにおいて以下(3)～(5)の研究成果を得た。

(3) 固体・液体相転移における研究成果

前年度からの研究活動の発展として、熱方程式と Allen-Cahn 型方程式をカップリングさせた放物型変分不等式のシステムを扱い、このシステムが再現する自由境界に関して以下2つの成果を得た。

- ① 多角形構造を基本とする異方性を伴うケースにおいて、外的刺激に対して安定性を持つ自由境界の幾何学的形状を明らかにした。
- ② 円を多角形近似する事によって異方的状況から等方的状況へアプローチする近似極限問題を導出し、極限の自由境界の形状に対する幾何学的観点からの考察を与えた。等方的状況では既に安定な自由境界の形状に関する報告例があるが、今回の考察によって実際には先行の報告よりも多くの安定な自由境界が存在することがわかった。

(4) 薄膜磁性体における研究成果

助成期間2年目より、新たに薄膜磁性体の支配エネルギーが再現する自由境界の考察に着手した。このエネルギーの主要変数は、磁化の強さと方向を表す3次元のベクトル値関数である。ここでは退化性を伴うエネルギーに焦点を当て、膜幅をゼロとする時の極限問題に関して以下2つの成果を得た。

- ① 研究の第一段階として、エネルギーの定義域が膜幅に関して不動であるケースを扱った。結論として、このケースでは「 Γ 収束」の一般論が適用可能であることが明らかになり、更にこの理論を適用する事によって現象の直観的理解に適った考察結果が得られた。
- ② 研究の第二段階として、エネルギーの定義域が膜幅に関して可変であるケースを扱った。このケースでは上記の「 Γ 収束」の一般論の適用は無理であっ

たが、エネルギー固有の性質を活用する事によって、より発展的な枠組みでも現象の本質を捉えた結論を導くことが出来た。

助成期間の最終年(2011年度)では、前年度から継続の「薄膜磁性体」に現れる自由境界問題に関する研究課題から活動をスタートさせたが、前半期の早い時期に課題遂行の見通しをつけられたため、後半期には「固体・液体相転移に現れる自由境界の外力による最適制御」といった発展的な課題を扱う新しい段階へ研究を進展させることができた。平成23年度で得られた研究成果は大きく以下(5)(6)にまとめられる。

(5) 薄膜磁性体に関する研究成果

薄膜磁性体を対象とする研究課題に関しては、前年度より退化型の材料係数が組み込まれた数学モデルを扱ってきており、膜幅ゼロの極限を取ればオリジナルの3次元モデルを2次元モデルへ単純化できることがわかっている。これを踏まえ本年度では、2次元モデルの解が再現する自由境界の幾何学的構造の解明に取り組んだ。その結果、薄膜磁性体の数学モデルの解構造は材料係数の分布に大きく左右され、特に自由境界の幾何構造と材料係数が退化する部分との間には直接的な関連性があることを明らかにした。

(6) 最適制御問題の考察とその数値実験

固体・液体相転移に現れる自由境界に関しては、前年度までに等方的構造・異方的構造の双方において様々な幾何構造の報告例の蓄積がある。従って本年度では、等方的な自由境界を再現する Allen-Cahn 型方程式に対する最適制御問題を新たに考案し、外力の調節によって自由境界の幾何構造の形成を制御可能かどうかについて考察を与えた。更に、最適制御を求めるための数値計算アルゴリズムも構築し、制御問題における自由境界の形成プロセスを数値実験的立場から明らかにした。

活動全般を振り返ると、本研究では「固体・液体相転移」および「薄膜磁性体」に現れる自由境界問題を対象に、申請段階からの主目的であった自由境界の幾何学的構造の解明について多くの研究成果を報告することができた。特に固体・液体相転移の分野において「最適制御」という発展的課題へ研究を進展させたばかりでなく、数値計算による検証実験にまで考察が及んだ点は、当初計画の予想を上回る期待以上の研究成果として評価することができる。

しかしながら、本研究で扱った研究課題は「固体・液体相転移」と「薄膜磁性体」の2つの物理現象に現れる自由境界問題に限られている。従って、これら以外の自由境界問題に対しても同様の解析手法が有効であるかどうかは今後の興味の対象となっており、そのためには多種類の自由境界に対する統一的な扱いを可能とする新しい数学理論の構築が求められている。こちらに関しては、現在「仮似変分不等式」およびこれに準ずる解析手法を有望視しており、関連分野の研究者による新しい協力体制を構築することで、今後も活動を継続したい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

- ① T. Ohtsuka, K. Shirakawa and N. Yamazaki, Optimal control problem for Allen-Cahn type equation associated with total variation energy, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 査読有, Vol. 5, 2012, pp. 159-181.
- ② 白川 健, 渡邊 紘, 山崎 教昭, 結晶粒界現象に関連する1次元フェーズ・フィールドモデル, 変分問題の展開 - 発展方程式論における変分的方法, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1779 巻, 2012, 27-51.
- ③ K. Shirakawa, Continuous dependence among isotropic-anisotropic total variation flows associated with phase transitions, *Proceeding of Workshop on Mathematical Control Theory in Kobe*, 査読無, 2011, pp. 155-161.
- ④ R. Hadiji and K. Shirakawa, 3D-2D asymptotic observation for minimization problems associated with degenerate energy-coefficients, *Dynamical systems, Differential Equations and Applications (Dresden, Germany, 2010)*, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 査読有, Supplement volume, 2011, pp. 624-633.
- ⑤ K. Shirakawa, Stability analysis for phase field systems associated with crystalline type energies, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. -S*, "Thermomechanics and Phase Change", 査読有, Vol. 4, 2010, pp. 483-504.
- ⑥ R. Hadiji and K. Shirakawa, Asymptotic analysis for micromagnetics of thin films governed by indefinite material coefficients, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 査読有, Vol. 9, 2010, pp. 1345-1361.
- ⑦ A. Kadoya, A. Ito and K. Shirakawa, Optimal control problems for regional economic trends, *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.*, 査読有, Vol. 32, 2010, pp. 341-364.
- ⑧ K. Shirakawa, Two-dimensional steady-state solutions of anisotropic total variation flows associated with phase transitions, *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.*, 査読有, Vol. 32, 2010, pp. 483-504.
- ⑨ 白川 健, 1次増大度を持つエネルギーに基づく2次元相転移モデルにおける安定性解析, 非線形発展方程式と現象の数理, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1640 巻, 2009, 1-22.
- ⑩ K. Shirakawa, Stability analysis for two dimensional Allen-Cahn equations associated with crystalline type energies, *Dynamical systems, differential equations and applications*, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 査読有, Supplement volume, 2009, pp. 697-707.
- ⑪ K. Shirakawa, Structural observations for eigen-value type problems associated with the vectorial total variation, *Adv. Math. Sci. Appl.*, 査読有, Vol. 19, 2009, pp. 295-312.
- ⑫ K. Shirakawa, Continuous dependence for solution classes of Euler-Lagrange equations generated by linear growth energies, *Banach Center Publications*, 査読有, Vol. 86, 2009, pp. 287-302.

[学会発表] (計 29 件)

- ① 白川 健, 渡邊 紘, 結晶粒界現象と関連する1次元放物型連立方程式に対するエネルギー消散解, 日本数学会 2012 年度年会 (実函数論分科会), 2012 年 3 月 28 日, 東京理科大学 (東京都).
- ② 山崎 教昭, 久保 雅弘, 白川 健, A vector-valued elliptic-parabolic variational inequality with time-dependent constraint, 日本数学会 2012 年度年会 (実函数論分科会), 2012 年 3 月 28 日, 東京理科大学 (東京都).
- ③ K. Shirakawa, Energy dissipation in a one-dimensional parabolic system generated by unknown-dependent total variation, *Seminario de Análisis Matemático*, Universitat de València, 2012 年 3 月 26 日, Departamento de Análisis Matemático, Universitat de València (Spain).

- ④ 白川 健, 渡邊 紘, 未知変数依存型全変動に基づく 1 次元放物型連立方程式におけるエネルギー消散性, 第 4 回福島楕円型・放物型微分方程式研究集会, 2012 年 1 月 28 日, 福島大学 (福島県).
- ⑤ 白川 健, 渡邊 紘, 結晶粒界の 1 次元 Kobayashi-Warren-Carter モデルにおけるエネルギー消散性, 第 37 回発展方程式研究会, 2011 年 12 月 24 日, 岐阜大学 (岐阜県).
- ⑥ K. Shirakawa and H. Watanabe, Energy-dissipative solution to one-dimensional phase field model of grain boundary, Dutch-Japanese Workshop, Analysis of non-equilibrium evolution problems: selected topics in material and life sciences, 2011 年 11 月 7 日, Eindhoven University of Technology (Netherlands).
- ⑦ 白川 健, 渡邊 紘, 結晶粒界の Kobayashi-Warren-Carter モデルに対する空間 1 次元における弱解とエネルギー消散性, 表面・界面ダイナミクスの数理 II, 2011 年 10 月 13 日, 東京大学 (東京都).
- ⑧ 白川 健, 渡邊 紘, 結晶粒界の 1 次元 Kobayashi-Warren-Carter モデルに対する弱解の存在, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会 (実函数論分科会), 2011 年 9 月 29 日, 信州大学 (長野県).
- ⑨ K. Shirakawa and H. Watanabe, Weak solution to one-dimensional phase field system associated with grain boundary motion, One Forum, Two Cities: Aspect of Nonlinear PDEs (招待講演), 2011 年 8 月 30 日, National Taiwan Univ. (Taiwan).
- ⑩ K. Shirakawa and H. Watanabe, Mathematical model for grain boundary and one-dimensional weak solution, Summer Seminar on PDE in 2011, 2011 年 8 月 6 日, 龍谷大学セミナーハウスともいき荘 (京都府).
- ⑪ 白川 健, 山崎 教昭, 渡邊 紘, 結晶粒界現象に関連する 1 次元フェーズ・フィールドモデル, 変分問題の展開 - 発展方程式論における変分的方法, 2011 年 6 月 7 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府).
- ⑫ 白川 健, 渡邊 紘, 山崎 教昭, 時間依存全変動流を含む 1 次元放物型連立方程式, 「応用解析」研究会, 2011 年 5 月 21 日, 早稲田大学 (東京都).
- ⑬ 白川 健, 渡邊 紘, 山崎 教昭, 結晶粒界の 1 次元 Kobayashi-Warren-Carter モデルの可解性, 日本数学会 2011 年度年会, 2011 年 3 月 21 日, 早稲田大学 (東京都).
- ⑭ K. Shirakawa, H. Watanabe, N. Yamazaki, Solvability for one-dimensional Kobayashi-Warren-Carter model arising from grain boundary motion, 研究集会「非線形偏微分方程式一解の性質と形状」儀我美一教授紫綬褒章受賞記念研究集会, 2011 年 2 月 10 日, Nasic Plaza (東京都).
- ⑮ 白川 健, R. Hadiji, 退化する材料係数を持つ薄膜強磁性体における 3D-2D 極限問題, 第 36 回発展方程式研究会, 2010 年 12 月 23 日, 中央大学 (東京都).
- ⑯ K. Shirakawa, Mathematical Models Associated with Singular Diffusions, Applied Math Seminar in IMATI-CNR, 2010 年 11 月 9 日, Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche, Consiglio Nazionale delle Ricerche (IMATI-CNR) (Italy).
- ⑰ K. Shirakawa, Steady-state solutions for systems of PDEs including singular diffusion equations, Conference on Partial Differential Equations in Kumamoto, 2010 年 11 月 27 日, 熊本大学 (熊本県).
- ⑱ 白川 健, R. Hadiji, 退化性を伴う薄膜磁化モデルにおける 3D-2D 極限問題, 日本数学会 2010 年度秋期総合分科会 (実函数論分科会), 2010 年 9 月 25 日, 名古屋大学 (愛知県).
- ⑲ 白川 健, 特異拡散方程式を含む相転移モデルの安定定常解, 日本数学会 2010 年度秋期総合分科会 (函数解析学分科会・特別講演), 2010 年 9 月 23 日, 名古屋大学 (愛知県).
- ⑳ 白川 健, Limiting observation for minimizers of degenerative energies motivated by ferromagnetic thin films, 夏の偏微分方程式セミナー 2010, 2010 年 8 月 25 日, 神戸大学 (兵庫県).
- ㉑ K. Shirakawa, Phase transition models based on linear-growth interfacial energies, Tutorial Lectures and Internatinal Workshop "Singular Diffusion and Evolving Interfaces", 2010 年 8 月 6 日, 北海道大学 (北海道).
- ㉒ K. Shirakawa, R. Hadiji, 3D-2D asymptotic observation for minimization problems associated with degenerative energy-coefficients,
- ㉓ 白川 健, 異方的・等方的全変動流の安定定常解の連続依存性, 第 35 回発展方程式研究会, 2009 年 12 月 25 日, 中央大学 (東京都).

- ②④ K. Shirakawa, Continuous dependence for two-dimensional stable steady-state solutions of Allen-Cahn equations, governed by linear growth energies, *Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision 2009*, 2009年11月20日, 北海道大学(北海道).
- ②⑤ 白川 健, Rejeb Hadiji, 空間非一様な材料係数を持つ薄膜磁気フィルムにおける膜幅ゼロとするときの極限問題, 日本数学会 2009年度 秋季総合分科会(実函数論分科会), 2009年9月25日, 大阪大学(大阪府).
- ②⑥ 白川 健, ベクトル値関数の空間上で定義される全変動汎関数の劣微分作用素に対する固有値型問題, 日本数学会 2009年度 秋季総合分科会(函数解析学分科会), 2009年9月24日, 大阪大学(大阪府).
- ②⑦ K. Shirakawa, An approximation approach to the stability analysis for the Allen-Cahn type equation by the two-dimensional total variation flow, *Evolution Equations, Related Topics and Applications*, 2009年9月9日, Helmholtz Center, Munich (Germany).
- ②⑧ 白川 健, クリスタラインタイプ界面エネルギーに基づくAllen-Cahn方程式および全変動流による極限方程式の安定定常解の連続依存性, 夏の偏微分方程式セミナー2009, 2009年8月28日, 龍谷大学セミナーハウスともいき荘(京都府).
- ②⑨ K. Shirakawa and R. Hadiji, Asymptotic analysis for micromagnetics of thin films governed by indefinite material coefficients, 6th European Conference on Elliptic and Parabolic problems, 2009年5月25日, Hotel Serapo, Gaeta (Italy).

[その他]

ホームページ等

<http://www.edu.chiba-u.jp/home/professor/sugaku/su-9.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

白川 健 (SHIRAKAWA KEN)
千葉大学教育学部・准教授
研究者番号：50349809

(2) 研究協力者

ステファネッリ ウリッセ
(STEFANELLI ULISSE)
応用数学・情報工学研究所-イタリア学術
研究会議 (IMATI-CNR, Italy)・研究員
研究者番号：無

ハディジ レジェブ (HADIJI REJEB)
パリ東大学・教授
研究者番号：無

高野 辰之 (TAKANO TATSUYUKI)
関東学院大学工学部・助手
研究者番号：30637294