

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 4 月 1 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2012

課題番号：21740122

研究課題名（和文）非線形分散型方程式の解の長時間挙動と特異極限について

研究課題名（英文）Long time behavior and singular limit for solution to nonlinear dispersive equation

研究代表者

瀬片 純市 (SEGATA JUN-ICHI)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：90432822

研究成果の概要（和文）：本研究では、物理学、工学に現れる非線形分散型偏微分方程式の解の長時間挙動を調べた。特に、渦糸運動の高次近似モデルとして現れる高階非線形シュレディンガー型方程式の初期値問題の可解性、散乱問題、定在波解とよばれる特殊解の安定性について研究を行った。また長波と短波の相互作用を記述するシュレディンガー-KdV 連立系に対し、ある物理パラメータを動かしたときの挙動（半古典近似）について考察した。

研究成果の概要（英文）：We considered the long time behavior of solutions to nonlinear dispersive partial differential equations arises in various fields of physics and engineering. Especially, we focused on solvability, scattering problem, and the stability of some special solutions called standing waves for the higher order nonlinear Schrödinger type equation arising in context of the motion of vortex filament. We also studied the semiclassical limit of Schrödinger-KdV system which describes an interaction between long and short waves.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	600,000	180,000	780,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形現象

1. 研究開始当初の背景

非線形分散型方程式の解の長時間挙動は

線形項の影響による分散性、非線形項の影響による特異性とのバランスにより、解は

様々な様相を呈する。例えば線形項の影響が非線形項に比べ大きいとき、方程式の解は時間大域的に存在し、解は時間とともに線形化方程式の解に近づいていく。また非線形項が空間局所的な増幅効果を持つ場合、有限時間で局所的振幅が発散してしまうこともある。さらには定在波解という時間周期的な解が現われることもある。そこで本研究では具体的な分散型方程式のモデルを通して、一般的な非線形分散型方程式の解の長時間挙動のメカニズムを探る。

2. 研究の目的

本研究では渦糸運動の高次近似モデルとして現れる4階非線形Schrödinger型方程式や水面波方程式であるKorteweg-de Vries方程式の解の長時間挙動の研究等を通して非線形分散型方程式の解の構造を調べる。特に完全可積分性に依存しない、フーリエ解析や調和解析の手法によるアプローチによりこれらの問題に取り組む。

3. 研究の方法

(1) 4階非線形Schrödinger型方程式(4NLS)については振動積分の理論といった調和解析学の手法を用いることにより解の長時間挙動を明らかにする。また定在波解の安定性について変分法的アプローチで解析する。

(2) 波長の長い水面波と波長の短い水面波の相互作用を記述するSchrödinger-KdV連立系についての解の挙動を調べる。特にある物理パラメータを動かしたときの挙動(半古典近似)について研究を行う。

(3) Korteweg-de Vries(KdV)方程式やBenjamin-Ono方程式を含む一般の水面波方程式系についての解の長時間挙動や特異極限問題を調べる。本研究では関数解析的アプローチという、可積分構造に依存しない

手法により、より一般の水面波方程式の解析を試みる。

4. 研究成果

(1) 渦糸運動の高次近似モデルとして現れる4階非線形Schrödinger型方程式(4NLS)は、通常非線形Schrödinger方程式同様、定在波解と呼ばれる特殊解を持つ。(4NLS)は空間非周期的な定在波及び空間周期的な定在波を持ち、これらの定在波解の安定性を調べる最初の段階として(4NLS)のCauchy問題あるいは周期境界条件下での初期値問題の適切性(解の存在、一意性、初期値連続依存性)を調べる必要がある。論文⑥においては(4NLS)のCauchy問題の適切性、論文①においては周期境界条件下における(4NLS)の初期値問題の適切性について考察した。(4NLS)は非線形項に微分項を含むため、通常のエネルギー法を用いることができないという問題を生じる。Cauchy問題を解く際には、加藤の平滑化効果と呼ばれる解の持つ正則化効果を利用することによりこの困難を克服したが、周期境界条件下ではこのような解の平滑化効果はない。そこで論文①では通常用いるエネルギーに補正項を加えるというアプローチにより方程式の可解性を示した。

(2) 論文④において4階非線形Schrödinger型方程式(4NLS)の散乱問題の研究の第1段階として(4NLS)を単純化した、ある4階非線形分散型方程式の解の長時間挙動について考察した。また(4NLS)の非線形項には未知関数の2階導関数が含まれており、通常のエネルギー法を適用する際可微分性の損失という問題が生じるが、その問題を回避するために線形化方程式の解の持つ局所平滑化効果が有効であるかどうかなどを調べた。

(3) 上で述べたように(4NLS)は定在波解と呼

ばれる特殊解を持つ。本研究ではこれら定在波に対する軌道安定性、つまり、初期値が定在波の波形に十分近いとき、長時間経過後、(4NLS)の解は定的定在波に近い形状を保ち続けるか? という問題をSobolev空間の枠組みで考察した。

(4NLS)は2つのパラメータに依存する空間非周期的な定在波を持つ。論文⑤では1つのパラメータを固定したときの定在波の軌道安定性を Cazenave-Lions による変分法的アプローチにより証明した。

また(4NLS)は空間周期的な定在波も持ちこの定在波の軌道安定性についても研究した。周期定在波のまわりで(4NLS)を線形化した際に現れる Schrödinger 作用素は非常に複雑な形をしており、その作用素自身を解析することは困難である。そこで Angulo が解析した、周期定在波のまわりで非線形型方程式を線形化した際に現れる2階の Schrödinger 作用素に対するスペクトルの性質を利用することにより、4階の作用素の解析を経由せずに空間周期的定在波の軌道安定性を証明することができた。

(4)長波と短波、2つの波の相互作用を記述するSchrödinger-KdV連立系に対し、半古典近似問題と呼ばれる、方程式に含まれるあるパラメータを動かしたときの解の挙動に関する問題について考察した。解の挙動を調べるため、方程式にMadelung変換とよばれる未知関数の変換を施すが、この変換により、ある非線形分散型-双曲型連立方程式が現れる。論文③ではこの非線形分散型-双曲型連立方程式の可解性について考察を行った。さらに論文①で用いた修正エネルギー法を用いることでMadelung変換した後の方程式の可解性をパラメータに依らない時間区間で解くことができた。さらに Schrödinger-KdV連立系のパラメータを動か

したときの解の挙動も捉えることが出来た。

(5)平成24年8月29日～8月30日に福泉麗佳氏、前田昌也氏(東北大学)と共に研究集会「Workshop on Nonlinear Dispersive PDEs」を開催し、アメリカや韓国の研究者を招聘した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

① Jun-ichi Segata, Refined energy inequality with application to well-posedness for the fourth order nonlinear Schrödinger type equation on torus, Journal of Differential Equations, 査読有, Vol. 252, 2012年, pp. 5994-6011,

DOI:http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2012.02.016

② Jun-ichi Segata, Well-posedness and standing waves for the fourth-order non-linear Schrödinger-type equation, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, Vol. B26, 2011年, pp. 81-92.

③ Shuichi Kawashima, Chi-Kun Lin, and Jun-ichi Segata, The initial value problem for some hyperbolic-dispersive system, Mathematical Methods in Applied Sciences, 査読有, Vol. 35, 2011年, pp. 125-133, DOI : 10.1002/mma.1542

④ Jun-ichi Segata, A remark on asymptotics of solutions to Schrödinger equation with fourth order dispersion, Asymptotic Analysis, 査読有, 2011年, pp. 25-36,

DOI : 10.3233/ASY-2011-1051

- ⑤ Masaya Maeda and Jun-ichi Segata, Existence and Stability of Standing Waves of Fourth Order Nonlinear Schrödinger Type Equation Related to Vortex Filament, Funkcialaj Ekvacioj, 査読有, Vol.54, 2011年, pp.1-14, DOI : <http://dx.doi.org/10.1619/fesi.54.1>
- ⑥ Jun-ichi Segata, Well-posedness and existence of standing waves for the fourth order nonlinear Schrödinger type equation., Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series , 査読有, Vol.27, 2010年, pp.1093-1105, DOI : 10.3934/dcds.2010.27.1093
- ⑦ Jun-ichi Segata, Final state problem for some KdV type equation, RIMS Kokyuroku Bessatsu , 査読有, Vol.B22, 2010年 pp.13-20.

[学会発表] (計5件)

- ① Jun-ichi Segata, KdV, nonlinear Schrödinger equations-I , KdV, nonlinear Schrödinger equations-II” NCTS/CMMS Seminar on PDEs, Theory and Applications, 2012年10/31, National Chiao Tung University, Hsinchu, Taiwan.
- ② 瀬片純市, “Well-posedness for the fourth order nonlinear Schrödinger type equation on torus” 日本数学会2012年度秋季総合分科会2012年9/21 九州大学 福岡市.
- ③ Jun-ichi Segata, “Long time behavior of solutions to non-linear Schrödinger equations with higher order dispersion” The 4th MSJ-SI “Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations” 2011年9/21 九州大学 福岡市.
- ④ Jun-ichi Segata, Well-posedness and standing waves for the fourth-order

non-linear Schrödinger-type equation, Workshop on Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, 2010年7/7 京都大学数理解析研究所 京都市.

⑤ 瀬片純市, “高階非線形分散型方程式の解の長時間挙動” 日本数学会2010年度年会(特別講演) 2010年3/27, 慶応義塾大学 横浜市.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

瀬片 純市 (SEGATA JUN-ICHI)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号 : 90432822

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし