

科学研費補助金研究成果報告書

平成 24 年 6 月 8 日現在

機関番号：24402

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21740301

研究課題名（和文） 群論による多体エンタングルメントの定量化と分類

研究課題名（英文） Classification and Quantification of multi-partite entanglement by using group theory

研究代表者

杉田 歩 (SUGITA AYUMU)

大阪市立大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：90398412

研究成果の概要（和文）：群論的手法を用いて、多体エンタングルメントの定量化と分類を試みた。3-qubit 系に関しては、既知の measure の完全系が別の形で得られることが分かった。4-qubit 系に対しても、十分な数の measure が得られることを確認した。5-qubit 以上の系に関しても、新たな measure を多数得た。また、qubit 以外の多レベル系（qudit 系）に対しても、measure を系統的に生成するコンピュータプログラムを作成した。

研究成果の概要（英文）：We studied classification and quantification of multipartite entanglement by using a group theoretical method. For 3-qubit systems we found that our method can generate the known complete set of measures in a different form. For 4-qubit systems we confirmed that enough number of measures can be generated by our method. Many new measures are also found for systems with more than four qubits. We also made a computer program to generate measures for general multi-level systems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学、数理物理・物性基礎

キーワード：量子情報、エンタングルメント、群論

1. 研究開始当初の背景

量子系におけるエンタングルメントは、量子情報処理における本質的なリソースとして近年大きな注目を浴びている。しかし、エンタングルメントの大きさを定量化する研究は、2 体系においては既に多くの研究が成

されているものの、多体系に関しては分からないことが多い。

多体系に対しては、単純にエンタングルメントの大小を比較不可能な質的に異なるエンタングルメントが存在することが知られており、それらの数は系の構成要素が増える

につれて爆発的に増加する。これをどのように定量化、分類するかが大きな問題となっている。

また、重要な関連問題として、量子統計力学の基礎付けがある。この問題と、非常に複雑な多体エンタングルメントの性質が関連していることが指摘されており、また、これは非平衡定常状態等の非平衡系の普遍的な性質とも関係していると考えられている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、群論的手法を駆使して、多体エンタングルメントを定量的に特徴付ける **measure** を系統的に定義し、エンタングルメントの定量化と分類の理論を発展させることである。

また、関連問題として、量子系の平衡状態および非平衡定常状態のエンタングルメントについて調べる。特に、非平衡定常状態が、熱浴の性質の詳細によらないという普遍的な性質を持つことに関して、多体エンタングルメントとの関連を調べる。

3. 研究の方法

報告者が考案した、量子状態のコピーの集合を局所ユニタリー変換で既約分解する手法を用いて、エンタングルメントの **measure** を系統的に生成する。それによって多体のエンタングルメントを分類し、またその物理的、工学的な性質を考察する。

非平衡定常状態の性質に関しては、解析的手法として主に摂動論を用い、また、それを補完するものとしてDMRG（密度行列繰りこみ群）等の数値的手法を用いる。

4. 研究成果

我々の手法では、与えられた量子状態のコピーを複数個用意し、それを局所ユニタリー変換群に関して既約分解することによって、エンタングルメント **measure** が得られる。この際、当然ながら多くのコピーを用意して分解すれば多くの **measure** が得られることになるが、得られた **measure** の全てが独立であるわけではなく、どれが独立な **measure** であるか、また、何コピーを用意すれば **measure** の完全系が得られるか、ということが重要な問題となる。

エンタングルメントの分類においては、通常 LOCC (Local Operations and Classical Communication) または SLOCC (Stochastic LOCC) による同値類が用いられることが多い。我々の手法では、各既約要素のノルムから LOCC 不変量が得られ、特に singlet 表現のノルムからは SLOCC 不変量が得られる。

3-qubit 系では、4 コピーの既約分解によって、既知の **measure** が全て (別の形で) 得られることを確認した。4-qubit 系では、6 コピーの既約分解で十分な数の **measure** が得られることが分かったが、これが完全系を成していることはまだ証明できておらず、既存の研究における分類とどのように対応しているかも完全には分かっていない。5-qubit 以上の多 qubit 系に対しても、新たな **measure** が得られることを確認した。また、qubit 系以外の多レベル系に対しても、系統的に **measure** を生成するコンピュータプログラムを作成した。

多 qubit 系に関しては、よく使われる LOCC や SLOCC による分類は複雑になり過ぎるので、さらに qubit の置換対称性を用いた分類が有効であると思われる。このためには、置換群の表現を用いた状態の分類も考察した。強くエンタングルした状態は置換対称性の高い状態である傾向が強いことが分かったが、一般的な関係は明白になっていない。

また、関連問題として、量子統計力学の基礎付けの問題を考察した。平衡系に関しては、以前報告者によって、多体系の非常に複雑なエンタングルメントによって系の個性がほぼ判別不可能になることが、統計力学成立の本質的理由と考えられるというアイデアが提出されている。非平衡定常状態に関して、熱浴の詳細によらず、熱浴のマクロなパラメーター (温度、化学ポテンシャル等) のみによって系の状態が決まるという非常に強い普遍性が経験的に知られており、この性質と多体エンタングルメントとの関連を調べることは興味深いと思われる。

この問題に関して、まず我々は、系と熱浴の間のカップリングに関する摂動展開を用いて、熱伝導系の非平衡定常状態の解析的表現を求めた。特に、系および熱浴が (両熱浴の温度を除いて) 反転対称性を持つ場合には、非平衡定常状態の時間に依存しない明示的な表現が得られた。この状態は、久保公式と整合する有限のカレントを持っている。

この状態は、ある種のモードに関する和として表現することができ、各モードの重みが熱浴の詳細に依存して変化する。従って、熱浴に対する普遍性を理解するためには、各モードが全て同じような性質を持っていると仮定するのが最も分かりやすい。我々はこの仮説を数値的に検証してみた。その結果、各モードが類似しているという強い予想はあまり精度よく成り立っていないが、小さいエネルギー幅を導入してその中でモードの平均を取ると、エネルギーの値にほとんどよらず同じ性質が成り立つという、弱い形で予想が成立することが確認できた。

また、この状態は、有限なカレントを持っているが、マクロな温度勾配を持たない状態

となっており、熱伝導に対する基本法則であるフーリエ則（熱流と温度勾配が比例する）を満たしていない。これは、熱浴とのカップリングに関して弱結合を仮定して、最低次の近似を行っていることに原因があると思われる。この問題を乗り越えるために、最も単純な方法は、摂動の高次項を計算することであるが、これは表式が非常に複雑になり、また系のサイズが大きくなると近似の適用範囲が非常に狭くなるという問題を抱えている。

一般にフーリエ則を満たすような非平衡定常状態の解析的表現を求めるのは非常に難しい未解決問題であるが、我々はこの問題に関して、系の内部も弱結合を仮定して摂動論的に取り扱う手法が有効であると考えており、このやり方で温度勾配が出ることは、小さい系に関しては数値的に確かめられた。より大きい系ではDMRG法を使うことによって確認できると思われるが、弱結合系では緩和時間が長くなるため、まだ完全には確認できていない。また、解析的計算も現在実行中である。

さらに、化学ポテンシャル差で駆動される電気伝導系についても同様の手法で調べてみた。反転対称性を仮定すると、電気伝導系でも摂動の最低次で有限のカレントを持つ非平衡定常状態が得られ、また久保公式も成立することが分かった。反転対称性を持たない系に関しては、非対称2重量子ドットに関して具体的計算を行い、明示的な状態の表式を得たが、この系に関しては通常久保公式は成り立たないことが分かった。久保公式の導出には色々微妙な点があり、久保公式の成立条件や意味については更に検討が必要であると考えている。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）

- ① Ayumu Sugita,
“Perturbative Analysis of Nonequilibrium Steady States in Quantum Systems”,
Proceedings of International Workshop “Low-dimensional Nanoscale Systems”,
査読無, 2011, pp. 17-28.

〔学会発表〕（計 10 件）

- ① “Time-independent Perturbative Analysis of Nonequilibrium Steady States in Quantum Systems”,

Ayumu Sugita,

East Asia Joint Seminars on Statistical Physics 2012 (招待講演),
2012年3月19日, Suzhou, China

- ② “時間に依存しない摂動論による非平衡定常状態の解析”,
杉田歩,
量子論の諸問題と今後の発展 (招待講演),
2012年3月16日, KEK, 筑波
- ③ “Perturbative Analysis of Nonequilibrium Steady States in Quantum Systems”,
Ayumu Sugita,
International Workshop “Low-dimensional Nanoscale Systems” (招待講演),
2011年11月11日, Tashkent, Uzbekistan
- ④ “時間に依存しない摂動論による非平衡定常状態の解析”,
杉田歩,
日本物理学会2011年秋季大会,
2011年9月22日, 富山大学
- ⑤ “Perturbative Analysis of Nonequilibrium Steady States in Quantum Systems”,
Ayumu Sugita,
Japan Slovenia Seminar on Nonlinear Science Kansai 2010,
2010年11月9日, Osaka Prefecture University
- ⑥ “量子系における非平衡定常状態の摂動論的解析II”,
杉田歩,
日本物理学会秋季大会,
2010年9月24日, 大阪府立大
- ⑦ “Multipartite Entanglement Measures in Terms of Group Representation Theory”,
Ayumu Sugita,
Summer School on Diversities in Quantum Computation/Information (招待講演),
2010年8月1日, U-Community Hotel, Higashi-Osaka
- ⑧ “量子系における非平衡定常状態の摂動論的解析”,
杉田歩,
日本物理学会, 2010年3月22日, 岡山大学
- ⑨ “量子スピン系における非平衡定常状態の普遍性と非普遍性”,

杉田歩,
日本物理学会, 2009年9月25日, 熊本大学

- ⑩ “Thermal conduction in quantum systems: universalities and their origins”,
Ayumu Sugita,
12-th Japan-Slovenia Seminar on Nonlinear Science (招待講演),
2009年10月9日, University of Maribor

6. 研究組織

(1) 研究代表者

杉田 歩 (SUGITA AYUMU)
大阪市立大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：90398412

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし