

機関番号：10101

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2009 ～ 2010

課題番号：21840001

研究課題名（和文） p 進ホッジ理論を中心とする数論幾何学の研究

研究課題名（英文） Research on p-adic Hodge theory

研究代表者

森田 知真 (MORITA KAZUMA)

北海道大学・大学院理学研究院・助教

研究者番号：40548187

研究成果の概要（和文）：複素代数幾何学における Hodge 構造の family の理論でもっとも本質的な役割を果たした Griffiths による Gauss-Manin 接続の横断性の類似を p 進 Hodge 理論において辿った。さらには、インテグラルな数論的多様体を整数環の Spec を底空間とした family とみなしたときにも類似の理論が存在することを提示した。

研究成果の概要（英文）：We study the p-adic analogy of the Griffiths transversality of Gauss-Manin connections which plays the essential roles in the deformation theory of classical Hodge structures. Furthermore, we propose that there also exists an analogy theory if we regard an integral arithmetic variety as a family over the spectrum of a ring of integers.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,090,000	327,000	1,417,000
2010 年度	990,000	297,000	1,287,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,080,000	624,000	2,704,000

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：p 進表現・p 進微分方程式

1. 研究開始当初の背景

近年さかんに研究が行われている $(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)$ -加群やそれに付随する p 進微分作用素を使うことによって p 進 Hodge 理論の研究を行ってきた。特に、p 進 Hodge 理論の family をパラメトライズしている底空間の次元を高次元に拡張することがわたしの研究の主なテーマであった。

まず、上で述べられている p 進微分作用素は複素代数幾何学における Hodge 理論の family の理論で本質的な役割を果たした Gauss-Manin 接続と呼ばれるものと類似の性質を持つことがわかっていった。

2. 研究の目的

(1) 幾何的側面

古典的に複素代数幾何学において得られている Hodge 構造の family の理論の類似を辿ることである。

まず、上で述べたように今まで使ってきた p 進微分作用素は古典的な Gauss-Manin 接続とよばれるものと類似の性質を持ち、なすべきこととして (ア)。Hodge 構造の変形の理論でもっとも本質的な役割を果たした Griffiths による Gauss-Manin 接続の横断性の類似を p 進 Hodge 理論においても行う。

イ). 古典的に成立していた局所モノドロミー定理や不変サイクル定理などの類似がどのような状況で起こりうるのかを追及する.

これらのことが実行できれば, p 進 Hodge 理論が古典的な Hodge 理論と同様に family の理論に対しても, 強力な影響力をもっていることを示せる.

(2) 数論的側面

Mark Kisin は

Crystalline representations and F-isocrystals. Algebraic geometry and number theory. 459-496, Birkhauser.

において下記のわたしの研究成果である Hodge-Tate and de Rham representations in the imperfect residue field case. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 43 (2010), no. 2, 341-356 (査読有)

の結果と状況は異なるが同様の性質を持つ微分作用素を用いて類似の結果を得ている. Kisin の論文で使われている数論的な微分作用素も古典的な Gauss-Manin 接続とよく似た性質を持つが, ア). この微分作用素も Griffiths の横断性の類似がなんらかの意味で成立することを示し, イ). 古典的に成立していた局所モノドロミー定理や不変サイクル定理の類似がこの状況でも成立することを示す. このように純幾何的なことを数論的な状況においても試みようとするものである. もし, これらの研究がうまくいけば, 1). 数論の幾何的観点からの見通しが鮮明になる 2). この数論的な状況で退化の幾何学が発展するなどの期待ができる.

さらに, すでに, p 進 Hodge 理論は整数論の究極の目的であるゼータ関数や L 関数の研究を行う岩澤理論に非常に大きな影響を与えることがわかっている. とりわけ, わたしの研究の中心である (φ, Γ) -加群の理論により, 岩澤理論における円分拡大(岩澤拡大)の explicit reciprocity laws が明示的に記述されているが, 上記の Kisin の論文において Breuil-Kisin 拡大というものが考えられており, 岩澤拡大と共に考えれば岩澤理論に新たな展開が望める.

3. 研究の方法

複素代数幾何の手法に慣れるために, 代数幾何のセミナーなどに積極的に参加したり, 参考文献の見直しを行ったり, Hodge 構造に対する理解を深めた.

さらに, 北海道大学の数論幾何セミナーにおいて来訪する研究者たちとのセミナーや議論を通して得られたものは大きい. また, 日常的に中村郁教授や朝倉政典准教授との会話の中で不足している代数幾何学の知識を充填することができた.

平成 21 年度にはフランスのパリの IHP で行われた Jean-Marc Fontaine を祝した研究集会 Galois trimester に二か月間参加し, p 進 Hodge 理論についての見識をひろめることができた.

また, 平成 22 年度にはアメリカのプリンストン高等研究所で行われた研究集会 Galois Representations and Automorphic Forms に参加し, ガロア表現の最近の進展をうかがい知ることができた.

具体的な研究手法について以下に述べる.

(1) 幾何的側面

複素代数幾何学における Hodge 構造の変形における類似を p 進 Hodge 理論に求める研究は Olivier Brinon が定義した幾何的 p 進微分作用素を用いて行っている. また, この微分作用素は Shankar Sen の先駆的な仕事にちなんで幾何的 Sen 作用素とよばれることもある. この作用素は基本群(ガロア群)の Lie 環になっており, p 進ガロア表現の研究にも大きな意味をもっている. 実際に, 下記のわたしの研究成果の

Hodge-Tate and de Rham representations in the imperfect residue field case. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 43 (2010), no. 2, 341-356 (査読有)

や現在, 投稿中の

Crystalline and semi-stable representations in the imperfect residue field case. (投稿中)

ではこの幾何的 p 進微分作用素を用いて, 剰余体が完全なときの p 進ガロア表現と剰余体が完全ではない一般のときの p 進ガロア表現を比較する研究を行い, その応用として, Laurent Berger による, 潜在的半安定表現とよばれるものとド・ラム表現とよばれるものが一致するということを主張する定理を剰余体が完全とは限らない一般のときに拡張する研究を行った.

すでに述べたように, この p 進微分作用素は古典的な Gauss-Manin 接続と類似の振る舞いをするのがわかっている. しかしながら, 古典的な Gauss-Manin 接続と決定的に異なるところはこの p 進微分作用素は p 進ガロア表現とは密接な関係にあるが, 一方でコホモロジカルな解釈を持たないことである. そのために, この p 進微分作用素による Hodge-Tate weight の挙動が古典的な Griffiths の横断性に類似し, また, この微分作用素が冪零で作用することから古典的な局所モノドロミー定理の類似が成立することはわかったものの, 幾何的類似性が弱いという面がある.

(2) 数論的側面

上記の幾何的な状況は p 進 Hodge 理論の family をパラメトライズしている底空間の

次元を高次元化していることに他ならない。新たな研究の方向へのひとつの着想として、インテグラルな数論的多様体を整数環の Spec を底空間とした family の理論と見なせば、上記の幾何的な状況で培われた手法をそのまま移植できるということである。

実際に Olivier Brinon が定義した幾何的 p 進微分作用素と類似の性質をもった作用素を使うことによって Mark Kisin は研究の目的で述べたような成果をあげている。この結果は数論幾何、特に、ラングランズプログラム周辺で活発に研究がすすめられており、非常に重要なものである。

この Olivier Brinon や Mark Kisin の類似を辿ることにより数論的微分作用素というべきものを以下の論文で定義した

Generalization of the theory of Sen in the semi-stable representation case. (投稿中).

この数論的微分作用素が幾何的微分作用素と同様に、古典的な Gauss-Manin 接続の重要な性質である Griffiths の横断性や局所モノドロミー定理などの類似を満たすことを示すことができた。ただ、やはり幾何的微分作用素と同様に p 進ガロア表現とは密接な関係にあるが、一方でコホモロジカルな解釈を持たないという面もある。

4. 研究成果

(1) 幾何的側面

上記の研究の方法で述べたように、幾何的な p 進微分作用素を研究することは p 進的な基本群 (ガロア群) の表現の研究に応用をもつ。

Hodge-Tate and de Rham representations in the imperfect residue field case. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 43 (2010), no. 2, 341-356 (査読有)

や現在、投稿中の

Crystalline and semi-stable representations in the imperfect residue field case. (投稿中)

において剰余体が完全なときの p 進ガロア表現と剰余体が完全ではない一般のときの p 進ガロア表現を比較する研究を行い、その応用として、Laurent Berger による潜在的半安定定理を高次元に拡張する研究を行った。またこれらの研究成果は大阪大学整数論&保型形式セミナーや北海道大学の数論幾何セミナーで発表を行った。

(2) 数論的側面

上記の研究の方法で述べたように、Olivier Brinon が定義した幾何的 p 進微分作用素の類似を辿ることにより数論的 p 進微分作用素の存在と性質を

Generalization of the theory of Sen in the semi-stable representation case. (投稿中).

において提示することを行った。

この研究成果の発表は北海道大学の数論幾何セミナーや東京大学国際玉原セミナーハウスの Workshop on arithmetic geometry at Tambara で行った。

また、さらには、いままで p 進ホッジ理論において習得してきた知識を東京大学国際玉原セミナーハウスの Workshop on arithmetic geometry at Tambara や韓国のテジョンにある KAIST における ASARC Seminar, さらに北海道大学の数論幾何セミナーにおいて口頭で講演することを行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① 森田知真, Hodge-Tate and de Rham representations in the imperfect residue field case. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 43 (2010), no. 2, 341-356 (査読有)

[学会発表] (計 7 件)

- ① 森田知真, Generalization of the theory of Sen in the semi-stable representation case. 数論幾何セミナー, 2010.9.22. 北海道大学
- ② 森田知真, Generalization of the theory of Sen in the semi-stable representation case. Workshop on arithmetic geometry at Tambara, 2010.5.26. 東京大学国際玉原セミナーハウス
- ③ 森田知真, Introduction on Representations p -adique cristallines et de de Rham dans le cas relatif. Workshop on arithmetic geometry at Tambara, 2010.5.25. 東京大学国際玉原セミナーハウス
- ④ 森田知真, p -adic Hodge theory (3 talks), ASARC Seminar, 2009.8.4-5. KAIST (韓国, テジョン)
- ⑤ 森田知真, p 進 Hodge 理論入門 (4 talks), 数論幾何セミナー, 2009.7.8-9. 北海道大学
- ⑥ 森田知真, Relative p -adic Hodge theory, 大阪大学整数論&保型形式セミナー,

2009. 5. 15. 大阪大学

- ⑦ 森田知真, Relative p-adic Hodge theory,
北海道大学談話会, 2009. 5. 7. 北海道大
学

[その他]

ホームページ等

<http://kazuma-morita.jimdo.com/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森田 知真 (MORITA KAZUMA)

北海道大学・大学院理学研究院・助教

研究者番号：40548187

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし