

機関番号：14301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2009 ～ 2010

課題番号：21840031

研究課題名（和文） 自己同型から見た K3 曲面とエンリケス曲面

研究課題名（英文） K3 and Enriques surfaces from the viewpoint of automorphisms

研究代表者

大橋 久範 (OHASHI HISANORI)

京都大学・数理解析研究所・特定研究員

研究者番号：40547006

研究成果の概要（和文）：代数多様体の自己同型は、変形に対して安定でなく、正則構造に深く依存して存在していることから、その計算のために多くの分野にまたがる知識が用いられるとても興味深い対象である。本研究では今までにも多く研究のなされている K3 曲面やエンリケス曲面を対象とし、その自己同型から派生する諸問題について考察した。具体的には、いくつかの K3 曲面の自己同型から出発しモデルヴェイユ格子、log del Pezzo 曲面、K3 曲面の上の自由対合に関して研究を行った。

研究成果の概要（英文）：Automorphisms of algebraic varieties are not stable under deformations and depend deeply on their regular structure. Hence their computations need to use a number of results from related areas, so that in fact the research of them can be said to be very interesting. Our research focused on K3 surfaces and Enriques surfaces which had been extensively studied so far and considered various problems related to their automorphisms. Specifically, beginning with automorphisms of some K3 surfaces, we studied Mordell-Weil lattices, log del Pezzo surfaces and free involutions on K3 surfaces from our viewpoint.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2009年度 | 960,000 | 288,000 | 1,248,000 |
| 2010年度 | 710,000 | 213,000 | 923,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 1,670,000 | 501,000 | 2,171,000 |

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数物系科学・代数学

キーワード：代数曲面、自己同型、モデルヴェイユ格子、ニーマイヤー格子、マッシュー群、log del Pezzo 曲面、自己同型の退化、Comessatti 曲面

1. 研究開始当初の背景

(1) K3 曲面はその性質の豊富さと類似によりしばしば楕円曲線の二次元版とも捉えられ、代数曲面の中でも興味を持たれて調べられている。たとえば現在も、代数幾何的・数論的性質の解明や、ミラー対

称性の二次元版としての解明が目標となり活発に研究が進められている。

(2) 1988年に発表された「有限単純群のひとつであるマッシュー群と有限シンプレクティック自己同型が対応する」という定理は、K3 曲面と他分野との極めて面

白いつながりとしてしばしば注目されている。この定理から派生した結果は多いが、そのうちの一つの拡張として、正標数におけるK 3 曲面の有限シンプレクティック自己同型群のマッシュュー群を用いた分類が近年のプレプリントで発表されていた。

- (3) K 3 曲面はしばしば楕円曲線束構造を持つ。一般に代数曲面の楕円曲線束構造に付随したモデルヴェイユ格子は面白い不変量で、有理曲面の場合にはこの分類や整切断の計算方法などがわかっていたが、K 3 曲面の場合にはまだわかっていたなかった。
- (4) 非シンプレクティックな自己同型に目を移すと、非シンプレクティック対合の分類の拡張として、素数位数の場合の非シンプレクティック自己同型の分類が最近完成された。対合の場合には **log del Pezzo** 曲面への大きな応用があることが知られていた。
- (5) エンリケス曲面はK 3 曲面に自由対合を付加したデータで定義される。最近、いくつかのK 3 曲面、すなわち積型クンマー曲面、ヤコビアンクンマー曲面、**Barth-Peters** 型の曲面、ヘッシアンK 3 曲面の場合にその上の自由対合が共役を法として分類されていた。ただしこの場合のこれらの曲面に課される一般性は幾何的な条件では書かれていなかった。
- (6) エンリケス曲面は曲面の分類論の中でK 3 曲面と似た位置づけや性質を持つものの、K 3 曲面と比較すると、まだ解明されていない部分が数多くあると言える。たとえば自己同型の観点から、まだ面白い現象が発見できるのではないかと思っている。

2. 研究の目的

- (1) 上記の、向井による「K 3 曲面における有限シンプレクティック自己同型群の、マッシュュー群を用いた特徴付け」定理が自己同型に関する定理の中でも特に興味深く追究された理由として、少なくとも次の項目を挙げることができる。
 - ① 非自明さ：ある種の自己同型群の全体像の記述に、一見無関連に見えるマッシュュー群という有限単純群が本質的に用いられる。
 - ② 記述可能性：分類した結果現れる 1 1

個の極大シンプレクティック自己同型群それぞれが、低い次数で射影空間に埋め込まれたK 3 曲面の対称性として明示的に例示できる。

- ③ 証明の多様性：少なくとも、マッシュュー表現の存在を用いる群論的方法、コホモロジー格子をニーマイヤー格子に関連付ける格子論的方法、中間商に現れる特異点の情報を帰納的に組み合わせる幾何的方法がある。
- ④ 拡張性：非シンプレクティック自己同型群への拡大のしかた、(有限ではない) 全自己同型群の計算、正標数のK 3 曲面に対する有限シンプレクティック群の分類と言った関連する重要な話題について、指針となる示唆を与えている。

本研究ではこれらを指針に、考える自己同型の種類を増やし、多様体も変化させることで、研究を広げたい。また、関連して現れる様々の多様体への応用も考えたい。今回、次のように問題を設定した。

- (2) K 3 曲面のモデルヴェイユ格子についてはまだ全体像と言えるものが得られていない。一方でシンプレクティック群の格子論的分類で行われたように、K 3 曲面のコホモロジー格子はニーマイヤー格子と近い階数を持ち、シンプレクティック群のようにうまく状況が設定できればニーマイヤー格子の面白い性質、例えばマッシュュー群との関係をK 3 曲面に引き継がせることができる。似た技術を用いて、K 3 曲面のモデルヴェイユ格子の理解を深めることができるか？
- (3) K 3 曲面の非シンプレクティックな対合は格子論的に分類されているが、実はすべての指数が2以下の **Log del Pezzo** 曲面が、K 3 曲面のそのような自己同型による商で書ける。そして、K 3 曲面に関する格子論を用いることで、これらの **log del Pezzo** 曲面に関するかなり深い結果が導かれる。では、新しく完成された位数3以上の非シンプレクティック自己同型に関しては **log del Pezzo** 曲面への応用はないのだろうか？
- (4) エンリケス曲面が論理的に「K 3 曲面+自由対合」のデータと同値であることから、自由対合そのものの研究もエンリケス曲面の研究には有用であると信じられる。今までの研究においてはK 3 曲面の中で“**Picard-general**”すなわちモジュライの中の可算個の閉集合の補集合に対応する点でのみ議論が行われていた。これ

は分類のテクニックが主に格子論的であることから生じる技術的な制約であった。では、これを取り除くように、自由対合に関して幾何的な議論を用いて結果を得ることができるであろうか？これにより、自己同型の変形に対する安定性や退化という視点が得られると期待できる。

3. 研究の方法

- (1) 階数の高いモデルヴェイユ格子は対称性が高く、安易な記述はできない。だが数値的不変量は比較的すぐにわかるので、これを用いて、ニーマイヤー格子、特にリーチ格子への埋め込みができないかどうか、格子の判別形式の理論を用いて試行錯誤した。また、整切断の個数の計算はコンピュータを用いたアルゴリズムが簡単に組めるので、何通りも試してみたが、実際には計算時間が途方もないものが多く、既に知られている以上の手がかりはあまり得られなかった。
- (2) Hutchinson-Weber 対合を定義できる射影モデルの方程式を眺め、それを定義する線形系を考えた。線形系を決定できた後は、代数幾何の標準的な議論により自由対合の記述が得られた。
- (3) K 3 曲面を位数 3 の非シンプレクティック自己同型で割った曲面を調べ、特異点解消、ヒルゼブルフ曲面や log del Pezzo 曲面への縮約過程を調べた。ここでも”Picard-general”という条件がある場合には比較的簡単に log del Pezzo 曲面が得られるが、それ以外の場合が難しかった。

4. 研究成果

- (1) 標数 11 におけるある超特異楕円 K 3 曲面のあるモデルヴェイユ格子が、ニーマイヤー格子の中に実現できることを示し、ここから関連付けられる binary Golay code の性質を用いて整切断の数え上げを行った。また、ある種の自己同型への応用も行った。特に、整切断の数え上げに関しては、有理曲面の場合と本質的に異なる、新しい議論をすることができた。以上は投稿中の論文”Integral sections of some elliptic K3 surface via the binary Golay code”にまとまっている。
- (2) ヤコビアンクンマー曲面の上の Hutchinson-Weber 対合の代数幾何的な記述を与えた。これは”Picard-general”

のような条件と独立な議論であり、これにより HW 対合の退化の記述を与えることができる。これを応用して、逆に Picard-general なヤコビアンクンマー曲面の上の HW 対合の分類に幾何的な証明を与えた。また、HW 対合を定義する Weber hexad と呼ばれるパラメータ集合の持つ六次対称群による対称性を、外部自己同型の観点から考察した。以上は出版予定の論文”Hutchinson-Weber involutions degenerate exactly when the Jacobian is Comessatti”にまとまっている。

- (3) K 3 曲面上の位数 3 の非シンプレクティック自己同型の分類の理論を、log del Pezzo 曲面で指数 3 を持つものの理論に応用した。この方法で得られる log del Pezzo 曲面が”重複非特異因子”を持つこと、逆も成り立つことを示し、この性質を持つ log del Pezzo 曲面の特異点を K 3 曲面の楕円曲線束の理論を用いて分類した。以上は投稿中の論文”K3 surfaces and log del Pezzo surfaces of index three”の内容である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- (1) H. Ohashi, Hutchinson-Weber involutions degenerate exactly when the Jacobian is Comessatti, Publ. RIMS に掲載決定済, 査読あり, 巻・発行年・項は未定
- (2) H. Ohashi, Integral sections of some elliptic K3 surface via the binary Golay code, RIMS-preprint, 査読なし, 巻 1696, 2010 年, 1-15. <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/file/RIMS1696.pdf>

[学会発表] (計 15 件)

- (1) H. Ohashi, K3 surfaces and log del Pezzo surfaces of index three, V Iberoamerican Congress on Geometry, 2010 年 12 月 11 日, Universidad de la frontera sede Pucon
- (2) H. Ohashi, Integral sections of some elliptic K3 surface via the binary Golay code, Lattices, reflection groups and Algebraic Geometry, 2010 年 11 月 26 日, 名古屋

屋大学

- (3) H. Ohashi, K3 surfaces and log del Pezzo surfaces of index three, 射影多様体の幾何とその周辺, 2010年11月5日, 高知大学
- (4) 大橋久範, ヤコビアンクンマー曲面のHW対合の退化とComessattiアーベル曲面の対応, 日本数学会, 2010年9月24日, 名古屋大学
- (5) 大橋久範, ある楕円K3曲面の整切断とbinary Golay codeについて, 日本数学会, 2010年3月24日, 慶応大学
- (6) H. Ohashi, Integral sections of some elliptic K3 surface via the binary Golay code, Geometry of lattices and infinite dimensional Lie algebras, 2010年3月18日, IPMU
- (7) H. Ohashi, On the MWL of some elliptic K3 surface in char. 11, 第2回GCOE若手数学者交流会, 2010年2月22日, 京都大学
- (8) H. Ohashi, Integral sections of some elliptic K3 surface via the binary Golay code, Algebraic Geometry in Characteristic p and Related Topics, 2010年2月19日, 東京大学
- (9) H. Ohashi, Integral sections of some elliptic K3 surface via the binary Golay code, 関西代数幾何セミナー, 2010年1月22日, 奈良女子大学
- (10) H. Ohashi, Integral sections of some elliptic K3 surface and the binary Golay code, 高次元代数幾何の周辺, 2009年12月14日, 京都大学
- (11) H. Ohashi, Integral points of some elliptic curve through the Niemeier lattices, 第七回代数曲線論シンポジウム, 2009年12月5日, 横浜ランドマークタワー18階横浜国立大学

サテライトキャンパス

- (12) H. Ohashi, On the MWL of some elliptic K3 surface in characteristic eleven, 代数幾何学シンポジウム, 2009年10月28日, 兵庫県豊岡市城崎
- (13) H. Ohashi, A Mordell-Weil lattice in characteristic eleven, Category Theory, Computer Science and Topology, 2009年10月17日, 信州大学
- (14) H. Ohashi, The Mordell-Weil lattice of an elliptic supersingular K3 surface in characteristic eleven, K3, Enriques and Special Surfaces, 2009年9月2日, 立教大学
- (15) H. Ohashi, Enriques surfaces covered by a fixed K3 surface, Berlin Mathematical Society Summer School and Conference "Moduli 2009", 2009年8月23日, Humboldt-Universitaet zu Berlin

[その他]

ホームページ等

研究代表者ホームページ:

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~pioggi/a/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大橋 久範 (OHASHI HISANORI)

京都大学・数理解析研究所・特定研究員

研究者番号: 40547006