様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 5 月 26 日現在

機関番号：14301
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2009～2010
課題番号：21840032
研究課題名（和文）　非有理的有理連結多様体の双有理幾何学的研究

研究課題名（英文）　Birational geometry of nonrational rationally connected varieties

研究代表者
　岡田　拓三（OKADA TAKUZO）
　京都大学・数理解析研究所・特定研究員（グローバルＣＯＥ）
　研究者番号：20547012

研究成果の概要（和文）：Ｑファノ多様体は（対数的）極小モデル理論の最終出力として現れ、代数幾何学の特に分類理論における重　要な対象である。高次元Ｑファノ多様体が、双有理同値である多様体同士を同一視してもなお有限個の族で尽くせないほど数多く存在する事（双有理的非有界性）に関する研究を行い、最終的には３次元以上の各次元においてＱファノ多様体の双有理的非有界性を示すことに成功した。さらなる詳細な結果として、有理連結的森ファイバー空間に関する類似の結果も得た。

研究成果の概要（英文）：Q-Fano varieties appear as one of the final outcomes of the (log) minimal model program and they are important objects in the classification theory of algebraic varieties. We studied the birational unboundedness of higher-dimensional Q-Fano varieties. The birational unboundedness means that varieties in concern form infinitely many families even if we identify varieties which are birational to each other. We have proved the birational unboundedness of Q-Fano varieties in each dimension at least 3. We further proved a similar result for rationally connected Mori fiber spaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,020,000	306,000	1,326,000
2010 年度	720,000	216,000	936,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,740,000	522,000	2,262,000

研究分野：代数学
科研費の分科・細目：代数学
キーワード：有理連結多様体、ファノ多様体、双有理的非有界性

１．研究開始当初の背景

(1)有理連結多様体は、有理多様体や単有理多様体などを含む双有理同値クラスであり、代数多様体の分類理論において基本的な対象である。穏やかな特異点（対数端末特異点）をもつようなＱファノ多様体も有理連結的であることが知られていて、それらは極小モデル理論の立場からも重要な対象である。た

ただし、さらに悪い特異点（対数標準特異点）を持つことを許すと、そのようなＱファノ多様体は必ずしも有理連結的とは限らない。本研究においては、有理連結多様体を対象とするため、Ｑファノ多様体は常に高々対数端末的得点しか持たないものとする。
(2)代数多様体を分類する際に、有界性という概念は基本的である。有界性とは、族の有限性を意味する。任意に次元を固定した場合、（非特異）ファノ多様体は有界であることが示されている。また、３次元においては、穏やかな特異点（標準特異点）しかもたないようなＱファノ多様体の有界性も知られている。一般に、特異点を適切に制限すればＱファノ多様体は有界であろうという有名予想（Borisov-Alexeev-Borisov 予想)があるが、未解決な難問題である。

(3)有界性を一般化した概念として、双有理的有界性がある。対象となる多様体で互いに双有理同値である者同士を同一視することを許すという立場の下での有界性のことであり、有界性よりも弱い概念である。事実、２次元のＱファノ多様体すべてを対象とすると、それらは非有界であるが、双有理的には自明に有界である。ところが、３次元Ｑファノ多様体をすべて対象とするとそれらが双有理的に非有界であることが Lin 氏により証明された。

２．研究の目的
(1)３次元以上の任意次元において、（対数端末的）Ｑファノ多様体の双有理的非有界性を示すことが研究の主目的である。研究の方法でも述べるように、Ｑファノ多様体の無限族を明示的に構成し、それらが双有理的に非有界であること示すことで主目的を得る算段である。

(2)(1)の結果が得られれば、直ちに有理連結多様体の双有理的非有界性が従うが、もう少し踏み込んだ詳細な結果を得ることも目標である。極小モデル理論により、有理連結多様体は、森ファイバー空間と呼ばれる特殊なファイバー構造を持つ多様体と双有理同値になることがわかる。森ファイバー空間の次元（３以上）及びファイバーの次元を正に固定したものも双有理的に非有界であろうと考え、そのような結果を得ることも研究の目的である。

(3)(1)及び(2)の研究において、明示的なＱファノ多様体の無限族を構成するわけであるが、それらのもつ双有理幾何学的性質を研究することも目的の一つである。具体的には、それらの多様体の自己双有理写像群を解明することを考えている。

３．研究の方法
(1)Ｑファノ多様体の無限族を明示的に構成し、それらが双有理的に有界となりえないことを示す方針である。具体的には、それらの無限族を重み付き超曲面の族として構成した。Lin 氏による３次元の場合の証明は一般次元において（現時点では）展開不可能であると考える。そこで、Kollar 氏により導入された、正標数還元手法を用いた。その手法はそもそも代数多様体の有理性問題を考察するものとして導入されたものである。特に、複素数体上で考察していれば決して得られないような双有理不変量が、特定正標数に還元することで得られることに着目した。その不変量を積極的に活用することで、構成したＱファノ多様体の無限族が実際に双有理的に非有界であることを示した。その双有理不変量を抽出するためには、対象となる多様体を正標数に還元する際に、一般の標数ではなく、特別な標数を法として還元する必要がある。これにより、還元された多様体は悪い特異点をもってしまうが、その特異点をうまく取り扱うことも証明の重要な部分である。
(2)有理連結的森ファイバー空間の双有理的非有界性の研究に関して述べる。(1)で構成したＱファノ多様体の森ファイバー構造を解明することで、多くの場合が、(1)の研究の直接的な帰結として得られる。ただし、コニック束、つまり、ファイバーの次元が１の場合に関してはそのような手法では示せないため、異なる議論が必要となる。
(3)Ｑファノ多様体の自己双有理写像群の研究方法に関して簡潔に説明する。(1)で述べた正標数還元手法により得られる双有理不変量を利用することで、正標数に還元して得られた多様体に関しては、その自己双有理写像群が自己同型群に一意することが従う。さらに考察対象の明示性から、その自己同型群を記述することも可能である。以上のように、正標数へと議論を移行したうえで、解明を行

うことを模索した。

4．研究成果

(1)３次元以上の各次元において、Ｑファノ多様体が双有理的に非有界であることを証明した。１次元及び２次元の場合、Ｑファノ多様体は双有理的に有界であるため、すべての次元においてＱファノ多様体の双有理的（非）有界性に関する問題を解決したことになる。また、３次元の場合は Lin 氏による結果の別証明を与えたことになる。また、この結果は、特異点に適切な制限を与えない場合には上述の Borisov-Alexeev-Borisov 予想が成立しえないことを意味し、当該予想の主張しうる限界であることを示している。

(2)また、さらなる詳細な結果として、有理連結的森ファイバー空間は、次元（３以上）及び底空間の次元（１以上）を固定しても、双有理的に非有界であるという結果を得た。底空間の次元が０の場合が残るわけであるが、それらは有界であることが予想されている（Borisov-Alexeev-Borisov 予想の特殊な場合である)。従って、本研究は有理連結多様体の双有理的非有界性という観点において考えうる最大限の結果を与えているとみなすことができる。

(3)明示的に構成したＱファノ多様体の自己双有理写像群の研究に関しては、重要な情報を得ることはできているが、未だ目的の達成には至っていない。対象の多様体を正標数に還元して得られる多様体についてはその自己双有理写像群を特定することに成功している。その情報をもとの複素数体上定義された多様体の情報へと持ち上げる議論が未だ解決していない問題として残っている。今後の課題としたい。

5．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Takuzo Okada, Birational unboundedness of log terminal Q-Fano varieties and rationally connected strict Mori fiber spaces, RIMS preprint, 査読無, RIMS-1706, 2010, 1～27.

② Takuzo Okada, On the birational unboundedness of higher dimensional Q-Fano varieties, Mathematische Annalen, 査読有, Vol. 345, 2009, 195～212.

〔学会発表〕（計８件）

① 岡田拓三, Birational unboundedness of rationally connected Mori fiber spaces, 都の西北　代数幾何学シンポジウム, 2010 年 11 月 12 日, 早稲田大学.

② 岡田拓三, Birational unboundedness of Q-Fano varieties, School (and workshop) on the minimal model program and Shokurov's ACC conjecture, 2010 年 7 月 9 日, University of Trento（イタリア）.

③ 岡田拓三, Ｑファノ多様体の双有理的非有界性, 複素幾何セミナー, 2010 年 5 月 26 日, 首都大学東京.

④ 岡田拓三, Ｑファノ多様体の双有理的非有界性, 早大理工代数幾何学セミナー, 2010 年 5 月 21 日, 早稲田大学.

⑤ 岡田拓三, Birational unboundedness of Q-Fano varieties of dimension at least five, アフィン代数幾何学研究集会, 2010 年 3 月 4 日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス.

⑥ 岡田拓三, Birational unboundedness of Q-Fano varieties of dimension at least five, 代数幾何学小研究集会, 2010 年 3 月 2 日, 埼玉大学.

⑦ 岡田拓三, On the rationality problem of Q-Fano weighted hypersurfaces of dimension three, 代数幾何学セミナー, 北海道大学, 2010 年 1 月 25 日.

⑧ 岡田拓三, Birational unboundedness of Q-Fano varieties of dimension at least five, 高次元代数幾何の周辺, 2009 年 12 月 18 日, 数理解析研究所.

６．研究組織

(1)研究代表者

岡田　拓三（OKADA TAKUZO)

京都大学・数理解析研究所・特定研究員（グローバルＣＯＥ）

研究者番号：20547012