

機関番号：14301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2009 ~ 2010

課題番号：21840034

研究課題名（和文） 幾何的量子化の圏化による位相的量子場の理論の拡張

研究課題名（英文） Extensions of topological quantum field theories by means of categorification of geometric quantization

研究代表者 五味 清紀 (KIYONORI GOMI)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：00543109

研究成果の概要（和文）：

(i)これまでの研究を発展させ、同変なねじれKコホモロジー理論の有限次元的な実現を得た。特に Clifford 代数の作用を用いた記述も可能になった。(ii)ある種のねじれK理論の普遍特性類のなす環の基底を構成し、この基底についての構造定数を記述した。この基底を用いてねじれ de Rham コホモロジーへの新しい持ち上げを与えた。(iii)微分K理論の積が定めるコホモロジー作用を Adams 作用素の一回 delooping を使って分解できることを示した。

研究成果の概要（英文）：

(i)Developing my results so far, I got a finite-dimensional realization of equivariant twisted K-cohomology theory. In particular, this realization allows that by using actions of Clifford algebras. (ii) I constructed a basis of the ring of universal characteristic classes for twisted K-theory of certain type. By means of this basis, I gave a new lift to twisted de Rham cohomology. (iii) I proved that an operation defined by the product in differential K-theory factors through a single delooping of an Adams operation.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
21 年度	400,000	120,000	520,000
22 年度	400,000	120,000	520,000
年度			
年度			
年度			
総計	800,000	240,000	1,040,000

研究分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：研究活動スタート支援

キーワード：位相的量子場の理論・幾何的量子化・Chern-Simons 理論・gerbe・twisted K-theory・differential K-theory

1. 研究開始当初の背景

Chern-Simons 理論は3次元位相的量子場の

理論を与えるための枠組みを提供する。位相的量子場の理論とは、通常、余次元 1 までの多様体に対し、何らかの不変量を与えるよう

なものである。だが、より高い余次元の多様体の不変量を含めるように拡張するということは自然な発想である。そのような試みはある種の比較的簡単な理論については実際に知られていた。特に、有限群を構造群とするような Chern-Simons 理論はそのような理論の例であり、Freed によって、言ってみれば、幾何学的量子化の手法を圏に持ち上げるような方法によって、構成的に与えられていた。だが、このような構成は、一般の構造群をもつ Chern-Simons 理論については知られていなかった。

具体的な構成はないものの、有限群 Chern-Simons 理論の場合から、余次元 2 の多様体の不変量となるべき圏の同値類のなす集合は、同変ねじれ K コホモロジーと関連することが示唆される。ねじれ K コホモロジーとは、普通の位相的な K コホモロジー理論を、3 次の整数係数コホモロジー類を局所係数のように用いて得られる変種の一つである。上の有限群 Chern-Simons 理論の場合における示唆にもとづいて、Freed, Hopkins および Telemann は、Verlinde 環が同変ねじれ K コホモロジーで与えられるという結果を得ている。

このような背景もあり、また超弦理論との関係もあり、最近では、ねじれ K 理論の研究が盛んになっている。また、多様体上の位相的 K 理論に微分形式の情報をつけ加えたような、微分 K 理論と呼ばれるものも、超弦理論との関係から研究されるようになってきている。

2. 研究の目的

有限群とは限らない構造群を持つ Chern-Simons 理論についても、位相的量子場の理論の余次元 2 の拡張を与えることが主要な目的である。具体的には、幾何学的量子化の手法を圏に持ち上げたような概念および構成方法というものを、数学的にきちんと定式化することである。然る後に具体的な Chern-Simons 理論へ応用することで、位相的量子場の理論の拡張を与えたい。そのようなものが得られると、ある意味ではいわゆる量子群が幾何学的に構成できたとも考えることができる。

上のような方法を定式化しようとする理由は、Chern-Simons 理論に類似する理論に対しても、同様な手法を考えることができるという利点があるためである。すると、やはり同様にして、位相的量子場の理論の余次元 2 への拡張を構成できる可能性がある。例えば、 $(4k+3)$ 次元における $(2k+3)$ 形式をゲージ場と

するような Chern-Simons 理論などは、その一例である。

3. 研究の方法

上で述べたような、幾何学的量子化の構成を圏に持ち上げたような構成方法を与えるためには、ねじれ K 理論が同型類のなす群となるような圏を与えることが必要である。普通の K 理論の場合には、そのような圏はベクトル束の圏を考えればよいが、ねじれ K 理論の場合には、ベクトル束を単純に一般化しただけではうまくいかないことが知られていた。これを受けて、私はこれまでの研究において、ベクトル束の一般化として、Hermite 一般ベクトル束というものを使うことを考え、一定の成果をあげていた。Chern-Simons 理論への応用上は同変なねじれ K コホモロジー理論を考えなければならない。そのため、これまで得られていた結果を、同変な場合へ拡張するという方法を軸とした。

また、K 理論や場の理論に関係したトピックについても視野に入れることも、研究の方法の一部としてあげることができる。ここ十年以上、幾何学・トポロジーは理論物理との相関によって発展している面が非常に大きいためである。そのため、具体的な研究対象としては、ねじれ K 理論に関連する概念や、微分 K 理論についての研究も行った。

4. 研究成果

すでに述べたように、ねじれ K 理論を同型類の群として与えるような圏を与えることが、本研究課題において主要な問題であった。そして、通常のねじれ K 理論については、Hermite 一般ベクトル束の圏が、そのような圏としての主要な候補であった。Chern-Simons 理論への応用を見据え、これまで得られていた自分自身の結果を、Lie 群作用がある場合に一般化したことは、研究成果の一つである。この成果において、具体的に得られた数学的な結果は、一つには、亜群上のねじれ Hermite 一般ベクトル束の概念を定式化したことである。そのような幾何学的対象のホモトピー類は群をなし、亜群の弱同値不変量となることが証明できる。その上で、こうして構成した群が、ねじれ同変 K 理論と自然に同型になることを、G-CW 複体上で証明した。証明する際の手法は本質的に群作用がなかったこれまでの場合と同様で、Fredholm 作用素の有限次元近似によって、ある種のコホモロジー理論の間の写像

を構成し、G-CW 複体の構造を用いて一点の場合へと議論を帰着させるものである。

さらに、この構成をもう一步推し進め、Clifford 代数作用を持つようなねじれ Hermite 一般ベクトル束も導入した。そのような、Clifford 代数作用を考慮に入れることは、K コホモロジーを考える上で、有用である。

この成果にもとづくと、幾何学的量子化の構成を圏に持ち上げたような構成において主要な役割を果たすべき圏の対象の候補としては、ねじれベクトル束を考えることが妥当になる。その圏の射の候補としては、「ホモトピー」を考えている。それが妥当であることを調べるために、同変ねじれ Hermite 一般ベクトル束の具体例の記述も行った。この具体例は、U(1) Chern-Simons 理論に関するもので、ある種の Fredholm 作用素の族を有限次元近似して得られるものである。

ねじれ K 理論に関わる研究成果として、ある種のねじれ K 理論の普遍特性類についてのものをあげることができる。そのような普遍特性類のなす環は、加算個の変数についての多項式環の、ある部分環となっていることが Atiyah と Segal によって知られていた。この部分環は、多項式環上のある微分の核として定義されるという、非常に単純なものであるが、その構造等についてはほとんど知られていない。私の結果は、この環を基底と構造定数によって記述するというものである。この構成は、ねじれ K 理論における Chern 指標と Adams 作用素を使った特性類の系統的な構成に動機づけられている。

この記述の応用として、通常のコホモロジーの要素として定義されるねじれ K 理論の特性類の、ねじれコホモロジーへの持ち上げとして、Atiyah と Segal によって与えられたものとは別の持ち上げを構成し、その基底を与えることができる。

この普遍特性類のなす環に対しては、それは多項式環、すなわち、幾つかの変数で生成される自由な可換環ではないことはわかっていた。そこでこの環を生成元と関係式で代数的に表示するという問題が、Atiyah と Segal によって言及されていた。私の基底と構造定数による記述は、非常に冗長ではあるが、生成元と関係式による代数的表示の一例を与える。

また、研究成果としては、微分 K 理論の積に

ついでの結果もあげられる。一般に、一般コホモロジー理論に対しては、それに微分形式情報をつけ加えるように、微分一般コホモロジー理論を定義できることが知られている。常コホモロジーの場合を考えて得られる微分常コホモロジーは、Cheeger-Simons コホモロジー、あるいは滑らかな Deligne コホモロジーとして知られていたものと一致する。微分常コホモロジーについては、その奇数次数の元を二乗するという写像は、ある準同型写像を与える。この準同型写像は係数つき常コホモロジーの間の準同型写像に縮小するが、Steenrod 平方作用素を用いて分解することが知られていた。同様の、奇数次数の元を二乗することで得られる微分 K コホモロジー理論の準同型写像も、係数つき K コホモロジー理論の準同型に縮小する。ここであげたい研究成果とは、この係数つき K コホモロジーの間の準同型写像が、次数 2 の Adams 作用素の delooping と呼ばれる作用素によって分解するという結果である。

一般に、微分一般コホモロジー理論は、アーベル群としては無限生成であり、その要素の積を具体的に計算することはほとんど不可能である。しかしながら、私の結果は、奇数次数要素の二乗という特別な場合には、古典的なコホモロジー作用素の計算を通じて、その計算を可能たらしめている。Adams 作用素の delooping はその計算結果が具体的にできるものであり、微分 K 理論の積が具体的に計算できる例を与えることになる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① K. Gomi and Y. Terashima, *Chern-Weil construction for twisted K-theory*. Communications in Mathematical Physics. 299 (2010), no.1, 225-254.
- ② K. Gomi, *Twisted K-theory and finite-dimensional approximation*. Communications in Mathematical Physics. 294 (2010), no. 3, 863-889.
- ③ K. Gomi and Y. Terashima, *Discrete torsion phases as topological actions*. Communications in Mathematical Physics. 287 (2009), 889-901.
- ④ K. Gomi, *Projective unitary representations of smooth Deligne*

cohomology groups.
Journal of Geometry and Physics, Vol.
59 (2009), no. 9, 1199-1356.

[学会発表] (計 10 件)

- ① Kiyonori Gomi
「*Differential K-theory and the Adams operation.*」
Seminar, Aarhus University, Denmark,
Dec 20, 2010.
- ② 五味清紀
「Atiyah-Segal 不変多項式環の基底」
日本数学会 2010 年度秋季総合分科会, 名
古屋大学, 2010 年 9 月 23 日.
- ③ 五味清紀
「A basis of the Atiyah-Segal invariant
polynomials」
非可換幾何学と数理物理学 2010, 慶
応大学, 2010 年 7 月 2 日.
- ④ 五味清紀
「Discrete torsion phases as topological
actions」
群と力学系に関わる離散幾何学, 愛媛大
学, 2009 年 9 月 3 日.
- ⑤ 五味清紀
「Twisted K-theory and
finite-dimensional approximation」
第 56 回トポロジーシンポジウム, 北海道
大学, 2009 年 8 月 8 日.
- ⑥ 五味清紀
「A finite-dimensional construction of
the Chern character for twisted
K-theory」
トポロジー火曜セミナー, 東京大学,
2009 年 6 月 9 日
- ⑦ 五味清紀
「A finite-dimensional construction of
the Chern character for twisted
K-theory」
微分トポロジーセミナー, 京都大学,
2009 年 7 月 7 日.
- ⑧ 五味清紀
「Multiplication in differential
cohomology and cohomology operation」
IPMU Komaba Seminar, 東京大学,
2009 年 6 月 8 日.

⑨ 五味清紀
「Twisted K-theory and
finite-dimensional approximation」
GCOE Geometry Seminar, 京都大学,
2009 年 5 月 18 日, 6 月 1 日.

⑩ 五味清紀
「捻られた K 理論の実現と Fredholm 作
用素の有限次元近似」
談話会, 京都大学, 2009 年 4 月 22 日.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kgomi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

五味 清紀 (KIYONORI GOMI)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号 : 21840034

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :