様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 6 月 1 日現在

機関番号：３２５０３
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2009 ～ 2010
課題番号：２１８４００４４
研究課題名（和文）　アイゼンシュタイン級数およびその応用についての研究

研究課題名（英文）　The Research for Eisenstein series and applications

研究代表者
軍司　圭一（GUNJI　KEIICHI）
千葉工業大学・工学部・助教
研究者番号：００５５０６５９

研究成果の概要（和文）：本研究の大きな成果は２つあり、一つは幾何的な応用、もうひとつは Siegel-Weil 公式との関係を明確にしたことである。幾何的な応用については、次数が一般の g, 重さが g+1 のジーゲルアイゼンシュタイン級数に対し、その定数項をきちんと計算することで、モジュラー多様体のコホモロジーの一部を計算することができた。Siegel-Weil 公式については、次数が 2, 重さが 2, レベルが素数 p のアイゼンシュタイン級数が、テータ級数の平均を取ったものと一致することを示し、低い重さの Siege-Weil 公式が自然な方法で成り立っていることを確認することができた。

研究成果の概要（英文）：There are two main result in our research; one is the geometric application, and the other is the relationship to Siegel-Weil formula. For the geometric application, we calculate the constant term of the Siegel-Eisenstein series of weight g+1 and degree g, which allows us to calculate a part of the cohomology of the modular varieties. On Siege-Weil formula, we can show that the Siegel-Eisenstein series of degree 2, weight 2, and level p (prime) coincide with the genus theta series, which is the average of the theta series. Such result is the important example of the Siegel-Weil formula for low weights.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,020,000	306,000	1,326,000
2010 年度	920,000	276,000	1,196,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,940,000	582,000	2,522,000

研究分野：整数論
科研費の分科・細目：代数学
キーワード：整数論、Siegel 保型形式、Eisenstein 級数

１．研究開始当初の背景

アイゼンシュタイン級数のフーリエ展開を求めることは、すでに多くの数学者たちによって考えられてきた。ジーゲルやマースなどの研究により、フーリエ係数は自然にオイラー積表示の形を持ち、実素点と有限素点とを別々に調べればよいことが示されている。実素点は志村の仕事で解析され、有限素点のうちの大部分はカウフォールド、ジーゲル、北岡らの研究を経た後、最終的に桂田によって完全に解決された。しかしレベル付きアイゼンシュタイン級数の、分岐する素点のところはまだきちんと計算されておらず、いまだフーリエ展開が書き下せていない状況であっ

た。
志村は 1983 の論文に於いて、レベル付きのアイゼンシュタイン級数を、ある対合でひねった場合のフーリエ係数を計算し、級数が収束しない場合のHekce流の解析接続を考察している。これは大きな結果ではあるものの、通常のフーリエ係数が計算できないのはやはり不満であった。さらに低い重さのアイゼンシュタイン級数のなす空間を計算するためにも、通常のフーリエ展開の計算は必要とされていたことであった。

２．研究の目的
本研究の目的は、アイゼンシュタイン級数のフーリエ展開を、分岐素点の部分をきちんと考察することによって、詳しく書き下し、さらにそれによって得られる様々な応用について考察することである。
特に、応用としては
・低い重さのアイゼンシュタイン級数のなす空間の次元の計算
・モジュラー多様体のコホモロジーの計算など、幾何的な応用
・Siegel-Weil 公式との関係
などがあげられる。

３．研究の方法
各フーリエ係数の有限素点に対応するところはジーゲル級数と呼ばれるが、分岐した素点でのジーゲル級数の計算については、通常の場合と違い、局所密度などの他の不変量との関係はいまだ見つかっていない。そのため、計算にはカウフォールドの手法を基にした、直接計算を行ってきた。また、幾何的な応用を考えるため、混合ホッジ構造や、モジュラー多様体についての考察を行ってきた。

４．研究成果
(1)　申請者はまず、分岐した素点におけるジーゲル級数に関して、次数が２の場合に明示的な公式を与えた。これの応用として、レベルが素数の場合に、Hecke 型の合同部分群及び主合同部分群に関する、低い重さのアイゼンシュタイン級数のなす空間の次元をきちんと計算することができた。
計算の方法は、カウフォールドに倣った直接計算であるが、分岐するところゆえの特殊事情がいくつか出てきて面白い計算になっている。通常のジーゲル級数では、対称行列の分母部分しか見ていないが、その分子部分が計算に直接聞いてくるため、多くの項が消えてしまい、不分岐のところとは全く違うタイプの項が出てくることになる。不分岐の場合と違い、局所密度のような重要な不変量との関係はまだ見つかっていない。結果は以下のとおりである。

Lemma

Let $\chi_p = (\frac{\cdot}{p})$, $G(\chi_p) = \varepsilon_p\sqrt{p}$. *If* $h = p^m \mathrm{diag}(\alpha, p^k\beta)$, $(p, \alpha\beta) = 1$ *then* $S_2^p(\psi, h, s) = S_1 + S_2$ *with*

$$S_1 = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} p^{(3-2s)k-1} - \varepsilon_p^2 p & \text{if } \psi = \chi_p \text{ and } t = 0, \\ \sum_{k=1}^{m} p^{(3-2s)k-1} + (p-1)\varepsilon_p^2 p & \text{if } \psi = \chi_p \text{ and } t \geq 1, \\ \bar{\psi}\chi_p(\alpha\beta)G(\psi\chi_p)\varepsilon_p\sqrt{p} & \text{if } \psi \neq \chi_p \text{ and } t = 0, \\ 0 & \text{if } \psi \neq \chi_p \text{ and } t \geq 1. \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} 0 & \text{if } t = 0 \\ \varepsilon_p^2 p^{-(2m+2)s+3m+1}\{(p-1)\sum_{n=1}^{\frac{t-2}{2}} p^{(3-2s)n} - p^{(3-2s)t/2}\} & \text{if } \psi = \chi_p,\ t \geq 2 \text{ is even}, \\ \varepsilon_p p^{-(2m+2)s+3m+1} & \\ \times\{p^{(3-2s)t+1/2}\bar{\psi}(\alpha\beta) + \varepsilon_p(p-1)\sum_{n=1}^{\frac{t-1}{2}} p^{(3-2s)n}\} & \text{if } \psi = \chi_p,\ t \text{ is odd}, \\ p^{-(2m+2+t)s+3m+(3t+3)/2}\varepsilon_p\bar{\psi}\chi_p(\alpha\beta)G(\psi)G(\psi\chi_p) & \text{if } \psi \neq \chi_p,\ t \geq 2 \text{ is even}, \\ p^{-(2m+2+t)s+3m+(3t+1)/2}\bar{\psi}(\alpha\beta)G(\psi)^2 & \text{if } \psi \neq \chi_p,\ t \text{ is odd}. \end{cases}$$

空間の次元に関しては、アイゼンシュタイン級数の解析だけではなく、そのカスプの様子がどうなっているかも重要である。カスプの様子については、Hecke 型の合同部分に関しては単純で見やすいが、主合同部分群に関しては、非常に複雑であり、次数が２の場合に限っても書き下すことはほぼ不可能である。そこで、主合同部分群に関する結果を得るためには、有限群 Sp(2,Z/p)の表現論を使う必要がある。この有限群の指標表はSrinivasanによって与えられているため、これを使って計算を行うことができるのである。

より具体的には、アイゼンシュタイン級数のなす空間への Sp(2,Z/p)の表現は、ある極大放物型部分群の２次指標の誘導表現の部分表現になっていることが示される。そしてHecke 型の合同部分群に関するアイゼンシュタイン級数のなす空間の次元は、その部分表現に現れる既約表現の個数に一致していることが示される。これにより、主合同部分群の場合の次元の計算を、Hecke 型の場合に帰着することができた。
例えば重さが２の場合、主結果は次ページのとおりである。次元の上限を求めることはできたが、カスプの様子から分かる次元の上限の分だけの、十分な保型形式を構成することができなかったため、完全に次元を与えることはできなかったが、かなり大きな成果を上げることができた。

(2)　上で述べた結果を拡張したものとして、一般次数ｇの場合のアイゼンシュタイン級数の定数項を、レベルが素数、あるいはより一般に自乗因子を含まない場合に計算することができた。このアイゼンシュタイン級数は、収束域から外れているために、解析接続をして得られるものであり、その定数項は自明ではない。一般次数の場合に、分岐する素点の

Theorem

$$\dim \mathcal{E}_2(\Gamma_0^2(p),\psi) = \begin{cases} 2 & \psi^2 \not\equiv 1, \\ 1 & \psi \equiv 1, \\ 2 \text{ or } 3 & \psi = (\frac{\cdot}{p}). \end{cases}$$

Theorem

1. *If* $p \equiv 3 \bmod 4$, *then*
$$\dim \mathcal{E}_2(\Gamma^2(p)) = \frac{1}{2}(p^2+1)(p^2-p-3).$$
2. *If* $p \equiv 1 \bmod 4$, *then*
$$\dim \mathcal{E}_2(\Gamma^2(p)) = \frac{1}{2}(p^2+1)(p^2-p-3) \text{ or } \frac{1}{2}(p^2+1)(p^2-p-4).$$

ジーゲル級数を計算しつくすことは難しいが、定数項に限れば計算ができる。
この結果として、特に重さが g+1 のジーゲルアイゼンシュタイン級数を考えると、これは収束域からぎりぎり外れている重さであり、Hecke 流の解析接続の理論を使わないと存在が示せない。これについては、志村の’83 年の論文においてすでに正則な保型形式であることは示されている。しかし既に述べたとおり、志村の論文においては対合でひねった関数のフーリエ展開しか計算していないため、これだけでは一体どのくらいの関数が得られているのかが分からない。申請者が定数項をきちんと計算することで、Hecke 型の合同部分群、及び主合同部分群に対しても、以下のような結果が得られた。

定理　レベルを奇素数とする。次数が g，重さが g+1 の Hecke 型、及び主合同部分群に関するアイゼンシュタイン級数のなす空間の次元は、次数が g のモジュラー多様体の 0 次元カスプの個数と一致する。

これの応用として、モジュラー多様体のコホモロジーの計算がある。モジュラー多様体のコホモロジーを混合ホッジ構造で分解したときの一部は、ジーゲルアイゼンシュタイン級数の存在により計算されることは、既に宮崎によってが示している。その時点で、アイゼンシュタイン級数が 0 次元カスプの個数と一致しているかどうかは、まだ正確には示されているとはいえない状況であった。申請者の結果により、少なくとも奇数レベルの、自乗因子を含まないようなレベルに対しては、宮崎の結果が正しいことは保障されたことになる。

(3) 次数 2、重さが 2 かつ素数レベルのアイゼンシュタイン級数を考える。これもそのままでは収束しないため、解析接続を行ってから計算する必要があるため、自明には得られない。アイゼンシュタイン級数の空間が 1 次元しかないことを利用すると、対合でひねることにより、この保型形式のフーリエ展開をきちんと計算することができる。
結果は以下のとおりである。

Theorem 1 The Fourier expansion of $E_p^2(Z)$ is given as follows.

(1) The consitant is 1.

(2) The term for $h = \mathrm{diag}(t, 0)$ is given by $\displaystyle \frac{24}{p-1} \sum_{\substack{d|t \\ (p,d)=1}} d$

(3) If $\mathrm{rank}\, h = 2$, then the Fourier coefficient is given by
$$\frac{288}{(p-1)^2} L(0, 1_p\chi_h) \prod_{q \neq p} \left(\sum_{l=0}^{\alpha_1} q^l \left(\sum_{m=0}^{\alpha-l} q^m - \chi_h(q) \sum_{m=0}^{\alpha-l-1} q^m \right) \right).$$

Here $\det(2h) = D_h f_h^2$ with discriminant D_h of quadratic field $\mathbb{Q}(\sqrt{-\det(2h)})$, χ_h is the quadratic character $\left(\frac{*}{D_h}\right)$, $\alpha = \mathrm{ord}_q f_h$ and $\alpha_1 = \mathrm{g.c.d}(h_1, 2h_2, h_3)$ with $h = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_3 \end{pmatrix}$.

さて、このようにして得られたアイゼンシュタイン級数は、実は菊田−長岡の論文で計算された、テータ級数の平均(genus theta と呼ばれる)に一致していることが示される。
菊田−長岡は、レベルが 1 のアイゼンシュタイン級数の p 進的な極限が実際に保型形式になることを示しており、Yang による局所密度の結果を利用して、p 進的な極限がテータ級数の平均と一致することを、フーリエ級数の比較によって証明している。その計算は非常に複雑であり、ダイレクトな証明とは言い難い。しかし我々の結果により、その保型形式はレベルが p のアイゼンシュタイン級数そのものであったことが示されたことになる。
　さらにこの一致は、アイゼンシュタイン級数がテータ級数の平均と等しいという、Siegel-Weil 公式の例にもなっている。Siegel-Weil 公式は、そもそもはジーゲルが示したものであり、アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数に現れるジーゲル級数が局所密度と関係が深いことを利用して得られた結果である。それは後にヴェイユにより、ヴェイユ表現を用いたテータ積分の形に一般化された。
この Siegel-Weil 公式が低い重さで成り立つかどうかは、保型表現論的に積分の形で書き下した Kudla-Rallis の結果はあるものの、それが古典的文脈でどう書かれるかは明らかではない。その意味で、ここで得られた一致は非常に重要な例であると言える。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕(計２件)
①軍司 圭一 ″On Siegel Eisenstein series of level p″, Abelian varieties and their moduli, 2010年7月11日, 東京大学大学院数理科学研究科　玉原セミナーハウス(群馬県)

②軍司 圭一 ''Eisenstein 級数とモジュラー多様体の mixed Hodge structure'', 野田モジュラー多様体研究集会, 2009年12月25日, 東京理科大学野田校舎(千葉県)

６．研究組織
(1)研究代表者
軍司　圭一(GUNJI　KEIICHI)
千葉工業大学・工学部・助教
研究者番号：00550659

(2)研究分担者
無し

(3)連携研究者
無し