

機関番号：32606

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2009 ～ 2010

課題番号：21840045

研究課題名（和文） ディラック作用素の摂動によるリーマン・ロッホ数の局所化とその応用

研究課題名（英文） Localization of Riemann-Roch number via perturbation of Dirac operator and its applications

研究代表者 藤田 玄 (HAJIME FUJITA)

学習院大学理学部・助教

研究者番号：50512159

研究成果の概要（和文）：エンドが適当な整合性条件をみたすトーラス束の族で覆われた開多様体上でディラック作用素の摂動による解析的指数理論であって位相的な性質をもつものを定式化し、その積公式を得た。応用として、ハミルトントーラス作用に対するギルマン・スターンバーグの量子化予想とトーリック多様体に対するダニロフの定理に対して幾何学的な証明を与えた。

研究成果の概要（英文）：We developed an analytic index theory with several topological properties and proved the product formula of the indices. We use perturbation of Dirac operators on open manifolds whose ends are covered by torus bundles with an appropriate compatibility conditions. As an applications we gave geometric proofs of Guillemin-Sternberg's quantization conjecture for Hamiltonian torus action and Danilov's theorem for toric manifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	810000	243000	1053000
2010年度	720000	216000	936000
年度			
年度			
年度			
総計	1530000	459000	1989000

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ディラック作用素, 指数理論, 局所化

1. 研究開始当初の背景

ある種のシンプレクティック多様体に対してディラック作用素の解析的指数として定義される不変量であるリーマン・ロッホ数が、適当な幾何構造のもとで、離散的な対象の数え上げに一致するという現象が知られていた。この現象は幾何学的量子化の文脈ではケーラー偏極と実偏極による量子化の対応として理解されるべき現象であるが、その統一的な理解は得られていない。

2. 研究の目的

上述の現象を内在的に理解するための幾何学的な枠組みを構築し、その枠組みをシンプレクティック幾何、特にリーマン面上の平坦接続のモジュライ空間などの重要な対象の幾何学に応用し、これまでに知られている結果をより精密なものにする。

3. 研究の方法

シンプレクティック幾何におけるラグランジアンファイバー空間の構造やハミルトントラス作用を抽象化した幾何構造として、適当な整合性の条件をみたすトラス束の族を考え、そのファイバーに沿ったディラック型作用素による摂動を用いて開多様体上で位相的な性質を持つ指数理論を構築する。位相的性質からの帰結として指数の局所化が従う。指数が局所化する部分は構造の退化する部分であるが、それはトラス束構造が退化している部分と摂動に用いるファイバー方向のディラック作用素が退化する部分であり、それはシンプレクティック幾何においては特異ファイバーおよびボア・ゾンマーフェルト条件に対応している。この枠組みにより大域的な不変量である解析的指数(リーマン・ロッホ数)の数え上げの現象が作用素の指数の局所化のレベルで捉えられる。

4. 研究成果

(1) 2009年度の研究成果は次のとおりである。ある整合性の条件をみたすトラス束の族で覆われたエンドを持つ開多様体上で、位相的な性質をもつ解析的指数理論の定式化を与えた。これは、これまでに確立していた単一のトラス束を用いた局所化の定式化の拡張である。拡張された定式化のもとでその指数の積公式を得た。ファイバー空間の底空間の凸多面体の組み合わせ的考察と局所モデルの指数の計算をすることで、4次元局所トリークラグランジアンファイバー空間のリーマン・ロッホ数がボア・ゾンマーフェルトファイバーの数に一致することを示した。この結果を論文にまとめプレプリントとして公表したのち学術雑誌に投稿した。また、ルクセンブルクにおける国際研究集会でこの結果を発表した。

(2) 2010年度は、2009年度に得た定式化の同変版を応用することで、ハミルトントラス作用の場合のギルマン・スターンバーグの量子化予想に対して幾何学的な証明を与えることができた。この結果を論文にまとめプレプリントとして公表したのち学術雑誌に投稿した。名古屋大学で行われた日本数学会秋季総合分科会とドイツの研究所MF0での国際ワークショップにてこの結果を発表した。また、積公式と局所モデルに対する計算を用いることで、トリーク多様体に対するダニロフの定理の局所化による幾何学的な証明を得た。この結果については現在論文を執筆中である。リーマン面上の平坦接続のモジュライ空間への応用に関しては、特異ファイバーの局所モデルの考察を行ったが、これまでに構築した局所化の理論が適用可能であることの証明にはいたらず今後の課題として残った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Hajime Fujita, Mikio Furuta, Takahiko Yoshida, Torus fibrations and localization of index III - equivariant version and its applications-, 2010, math.DG/arXiv:1008.5007, preprint (査読無し).
- ② Hajime Fujita, Mikio Furuta, Takahiko Yoshida, Torus fibrations and localization of index I -Polarization and acyclic fibrations-, Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, (査読有), 2010, Vol.17, 1-26.
- ③ Hajime Fujita, Mikio Furuta, Takahiko Yoshida, Torus fibrations and localization of index II – Local index for acyclic compatible system, 2009, math.DG/arXiv:0910.0358, preprint (査読無し).

[学会発表] (計 3 件)

- ① Hajime Fujita, Localization of Riemann-Roch numbers via torus fibrations, Geometric quantization in the non-compact setting, February 14-18, 2011, MFO, Oberwolfach.
- ② 藤田玄, トーラス束と指数の局所化 -量子化予想の証明-, 2010年度日本数学会秋季総合分科会・幾何学分科会, 2010年9月 名古屋大学
- ③ Hajime Fujita, Torus fibrations and localization of index, Third International Conference on Geometry and Quantization (GEOQUANT), September 7 - 11, 2009, University of Luxembourg .

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤田 玄 (FUJITA HAJIME)
学習院大学・理学部・助教
研究者番号 : 50512159

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

古田 幹雄 (FURUTA MIKIO)
東京大学大学院数理科学研究科・教授
研究者番号 : 50181459

吉田 尚彦 (YOSHIDA TAKAHIKO)
明治大学・先端数理科学インスティテュー
ト・研究員
研究者番号 : 70451903