

機関番号：34419

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2009～2010

課題番号：21840053

研究課題名（和文） 多重ゼータ関数の解析的挙動とその幾何学的側面からの研究

研究課題名（英文） Research on the analytic behavior of the multiple zeta function from the geometric aspect

研究代表者

佐々木 義卓 (SASAKI YOSHITAKA)

近畿大学・総合理工学研究科・博士研究員

研究者番号：20548771

研究成果の概要（和文）：幾何学的観点から多重ゼータ関数の非収束領域における挙動の解析を進め、詳しい情報を得ることが出来た。また多重ゼータ関数の新たな関数関係式を与えた。さらに多重ゼータ関数をその特別な場合として含む Witten ゼータ関数の研究も行った。Witten ゼータ関数の特殊値と最近導入された多重高次 Mahler 測度との関係を解明することで、多重高次 Mahler 測度に新たに幾何学的解釈を与えた。

研究成果の概要（英文）：I obtained some analytic information of the multiple zeta function by investigating from the geometric aspect. For instance, a new functional relation among the multiple zeta functions was obtained. Furthermore, I also researched on the Witten zeta function. I showed relations between Witten zeta values and multiple higher Mahler measures. Thereby, a geometric interpretation of the multiple higher Mahler measure was given.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,090,000	327,000	1,417,000
2010年度	990,000	297,000	1,287,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,080,000	624,000	2,704,000

研究分野：整数論

科研費の分科・細目：数物系科学・代数学

キーワード：多重ゼータ関数，多重ゼータ値，特異点解消，関数等式

## 1. 研究開始当初の背景

多重ゼータ関数は、Riemann ゼータ関数を拡張した多変数関数であり、その収束領域においては多くの情報が得られており、特に正整数点での特殊値は整数論、結び目理論など多くの分野と関連することが知られている。一方で非収束領域での挙動については、非正整数点が不確定特異点になっているなど、構造が複雑なため解析が難航しており、今まで

にない斬新な研究法が求められている。

## 2. 研究の目的

本研究は、多重ゼータ関数の非収束領域、特に不確定特異点での挙動の解析に、新たに幾何学的観点からの研究を取り入れることで、いまだ不明瞭な多重ゼータ関数の非収束領域における解析的挙動の解明を行うものである。また、多重ゼータ関数をその特別な

場合として含む、Witten ゼータ関数の観点からも研究を進め、多重ゼータ関数の統一的理解の深化を目指す。

### 3. 研究の方法

多重ゼータ関数の不確定特異点の解消を行うことで、不確定特異点での挙動の解析を行う。また収束領域と非収束領域での特殊値間の関係の観察や、テータ級数の対称性を用いた多重ゼータ関数の関数等式の研究などを行うことで、多重ゼータ関数の新たな解析的性質の解明を行う。さらに、それらの研究を Witten ゼータ関数の観点からも研究を進める。Witten ゼータ関数は、多重ゼータ関数とその特別な場合として含むだけでなく、非常に良い対称性をもつ関数である。Witten ゼータ関数の対称性を用いて、多重ゼータ関数の新たな性質の解明を行う。

### 4. 研究成果

多重ゼータ関数の不確定特異点の挙動の解析については、2重ゼータ関数の不確定特異点を完全に解消し、その詳細な情報を得る事ができた。また、3重ゼータ関数の不確定特異点の解消にも着手し、多くの情報を得る事ができた。また多重ゼータ関数の収束領域と非収束領域での挙動の対応を観察することで、多重ゼータ関数の新たな関数関係式を解明した。この関数関係式は、多重ゼータ関数の収束領域での挙動と非収束領域での挙動の間に関係があることを示唆するものであり、多重ゼータ関数の性質を解明する上で重要な研究結果と言える。

Witten ゼータ関数に関する研究も行った。Witten ゼータ関数の特殊値と、最近導入された多重高次 Mahler 測度の関係を解明することで、多重高次 Mahler 測度に新たに幾何学的解釈を与える事が出来た。これは、まだ導入して間もない多重高次 Mahler 測度が、非常に重要な研究対象であることを示唆するものである。また多重高次 Mahler 測度と多重 L 値(拡張された多重ゼータ関数の特殊値)との関係も示した。これらの研究結果については内外の研究集会で講演し、多くの聴講者から好評を得た。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① 佐々木義卓、多重 Euler 数の諸性質と付随する L 関数について、第 4 回多重ゼータ研究集会報告集、査読無、2011、1-8
- ② 佐々木義卓、The first derivative multiple zeta values at non-positive integers、The Ramanujan Journal、査読

有、Vol. 21、2010、267-284

- ③ 佐々木義卓、多重高次 Mahler 測度と Witten の体積公式について、早稲田大学整数論研究集会 2010 報告集、査読無、2010、58-64
- ④ 佐々木義卓、Weighted multiple zeta values via higher Mahler measure、数理解析研究所講究録、査読無、Vol. 1710、2010、217-227
- ⑤ 佐々木義卓、多重高次 Mahler 測度と Witten ゼータ値について、第 2 回 MZV セミナー報告集、査読無、2010、91-99
- ⑥ 佐々木義卓、多重高次 Mahler 測度と多重 L 値について、第 2 回 MZV セミナー報告集、査読無、2010、75-80

[学会発表] (計 17 件)

- ① 佐々木義卓、Poly-Euler 数の諸性質について、日本数学会 2011 年度年会、早稲田大学、2011 年 3 月 20 日
- ② 佐々木義卓、poly-Euler 数の諸性質と付随する L 関数について、第 4 回多重ゼータ研究集会、九州大学、2011 年 1 月 7 日
- ③ 佐々木義卓、Poly-Euler numbers and the related L-function、Algebraic Number Theory and Related Topics 2010、京都大学数理解析研究所、2010 年 12 月 7 日
- ④ 佐々木義卓、On multiple zeta values for coordinatewise limits at non-positive integers、Workshop on Number Theory and Zeta Values、Newcastle University (Australia)、2010 年 10 月 20 日
- ⑤ 佐々木義卓、Multiple higher Mahler's measure、Workshop on Number Theory and Zeta Values、Newcastle University (Australia)、2010 年 10 月 19 日
- ⑥ 佐々木義卓、On the multiple higher Mahler measure and related multiple zeta values、Analytic Number Theory-through Value Distribution and other Properties of Analytic Functions、京都大学数理解析研究所、2010 年 10 月 5 日
- ⑦ 佐々木義卓、一般 Bernoulli 数の poly 化と付随する L 関数の構成および諸性質について、多重ゼータ値の諸相、京都大学数理解析研究所、2010 年 9 月 9 日
- ⑧ 佐々木義卓、On generalized poly-Bernoulli numbers and related L-functions、第 9 回仙台台島整数論集会、東北大学、2010 年 7 月 20 日
- ⑨ 佐々木義卓、Witten ゼータ値と多重高次 Mahler 測度について、日本数学会 2010 年度年会、慶應義塾大学、2010 年 3 月 26 日
- ⑩ 佐々木義卓、多重高次 Mahler 測度と Witten の体積公式について、早稲田整数論研究集会、早稲田大学、2010 年 3 月 18 日

- ⑪ 佐々木 義卓、一般 Bernoulli 数の poly 化と付随する L 関数について、第 3 回ゼータ若手研究集会、名古屋大学、2010 年 2 月 20 日
- ⑫ 佐々木義卓、多重高次 Mahler 測度と Witten ゼータ値について、第 2 回 MZV セミナー、九州大学、2010 年 1 月 16 日
- ⑬ 佐々木義卓、多重高次 Mahler 測度と多重 L 値について、第 2 回 MZV セミナー、九州大学、2010 年 1 月 15 日
- ⑭ 佐々木義卓、Multiple higher Mahler measures and Witten zeta values, Number Theory Seminar in POSTECH、Pohang University of Science and Technology (Korea)、2009 年 11 月 26 日
- ⑮ 佐々木義卓、多重 Mahler 測度と Witten ゼータ関数について、香川セミナー、香川大学、2009 年 11 月 7 日
- ⑯ 佐々木義卓、Weighted multiple zeta values via higher Mahler measure、Analytic Number Theory 2009、京都大学、2009 年 10 月 16 日
- ⑰ 佐々木義卓、多重 L 値と高次 Mahler 測度について、日本数学会 2009 年度秋季総合分科会、大阪大学、2009 年 9 月 24 日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

佐々木 義卓 (SASAKI YOSHITAKA)  
近畿大学・総合理工学研究科・博士研究員  
研究者番号：20548771

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし