

# 科学研究費助成事業（基盤研究（S））公表用資料 〔令和5（2023）年度 中間評価用〕

令和5年3月31日現在

研究期間：2021～2025  
課題番号：21H04993  
研究課題名：新時代の頂点代数の表現論  
研究代表者氏名（ローマ字）：荒川 知幸（ARAKAWA Tomoyuki）  
所属研究機関・部局・職：京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号：40377974

## 研究の概要：

頂点代数とは、物理学における二次元の共形場理論の数学的記述を与える代数系として1980年代に導入されたが、近年頂点代数と「4D/2D 双対性」などの3次元以上の場の理論との新たな関係が発見され注目されている。本研究では頂点代数の表現論を4D/2D 双対性の立場から研究するものであり、物理学者による4次元から現れる擬平滑頂点代数の構成や存在に関する予想の解決などを旨とする。

研究分野：表現論,頂点作用素代数,数理解析

キーワード：頂点作用素代数,W代数,表現論,4D/2D 双対性,4次元の超対称性場の理論

## 1. 研究開始当初の背景

頂点代数は、群や環、体のような代数系の一種である。理論物理学における二次元の共形場理論の数学的記述を与える枠組みとして、1980年代後半に Borcherds によって導入された。無限次元リー環の代表的な例であるアフィン Kac-Moody 代数や Virasoro 代数は頂点代数の例を与えるため、頂点代数を無限次元リー環の一般化と見なすこともできる。

さて、その起源が二次元の理論であったことから、頂点代数が他の次元の場の理論と関係することは最近まで想像されていなかった。ところが、近年さまざまところで3次元以上の理論と頂点代数が関係することが発見されており、新しい現象として世界的に注目されている。このような理論の代表的なものの一つに、4次元の  $N=2$  超対称性を持つ場の量子論と頂点代数との関係を与える4D/2D 双対性がある。

4D/2D 双対性はどんな4次元の  $N=2$  超対称性場の量子論からでも、その不変量として頂点代数が定義されると主張する。さらに、そのようにして現れる頂点代数は、元の4次元の  $N=2$  超対称性場の量子論の完全不変量を与えることが期待されている。従って、これらの頂点代数を理解することは数学的のみならず物理的にも大きな意義がある。

一方、4D/2D 双対性に現れる頂点代数は、これまで中心的に研究されてきた頂点代数とは異なる特徴を持ち、既存の理論を適用することができない。そこで、4次元理論から現れる頂点代数を特徴付ける数学的性質の一つとして、2018年に荒川と川節は擬平滑性という概念を導入した。

## 2. 研究の目的

4次元の  $N=2$  超対称性場の理論は極めて豊かな理論であり、従ってその完全不変量とされている擬平滑性頂点代数も、当然同様に豊かな構造を持つことが期待される。実際、物理学者によって擬平滑性頂点代数に関して様々な興味深い予想が次々と提出され続けている。しかし、擬平滑性やクラスSカイラル代数などに関する我々の仕事を除いて、4D/2D 双対性に現れる頂点代数の数学的な研究は殆ど行われていないのが現状である。そこで本研究課題では、物理学者の予想を動機あるいは足がかりとして、擬平滑頂点代数の表現論の研究を、4D/2D 双対性の立場から展開することを目的とする。

## 3. 研究の方法

主なテーマとして、

- ・ 頂点代数の随伴多様体と Beem-Rastelli 予想
- ・ W代数の表現論と Argyres-Douglas 理論
- ・ クラスS頂点代数と(実)幾何学的ラングランズ対応
- ・ 擬平滑頂点代数の表現論と Hitchin 系
- ・ 正標数の手法を用いた擬平滑頂点代数の研究

を掲げ、これらの観点について、頂点代数の専門家である川節と山内、幾何学的表現論の専門家である疋田、物理学者である西中、雇用予定の複数のポスドク研究者、及び多数の海外共同研究者と共に、組織的に行う。また、研究交流や情報交流、議論のためのセミナーや研究集会（国内、国際）、チュートリアル的な集会などを適宜開催して研究を進める。

## 4. これまでの成果

主なものは以下の通りである。

- 1) 荒川は, Sven Moller (Hamburg 大) と桑原敏郎 (筑波大) との共同研究により, 物理学者 Bonetti-Meneghelli-Rastelli による, 複素鏡映群に付随する  $N=4$  超対称を持つ擬平滑なスーパー頂点代数の存在に関する予想を, 複素鏡映群が対称群の場合に解決した. より詳しくは,  $\mathbb{C}^2$  上の点の Hilbert 概型上の (マイクロローカルな) スーパー頂点作用素代数の層を構成し, その大域切断として現れる頂点作用素代数が擬平滑であり, 期待される性質を満たすことを確かめた. 当該結果に関する論文は現在準備中である.
- 2) 荒川と川節は, Thomas Creutzig (カナダアルバータ大) と共同でアフィンリー環のウエイト表現の圏を研究し,  $sl_2$  に付随する擬平滑な admissible レベルの単純アフィン頂点代数のウエイト表現の圏が,  $sl_2$  に付随する (unrolled な) 小さな量子群の有限次元表現の圏に (ブロック毎に) 圏同値である, という結果を得た. この研究は, 4次元理論から現れる頂点代数と4次元理論のクーロン枝の関係を動機として行ったが, リー環のウエイト表現の圏のアーベル圏としての構造に関する結果は有限次元リー環の場合ですらこれまで殆ど存在しなかったことから, 我々の結果は専門家に驚きを持って受け止められた. 当該結果に関する論文は現在準備中である.
- 3) 荒川は, ポスドクとして雇用した Dai と共に base affine space  $G/U$  上のカイラル微分作用素の層の研究し,  $G=SL_3$  の時かつレベルが  $-2$  のときその大域切断が, レベルが  $-2$  の  $SO(8)$  の単純アフィン頂点代数になることを示した. これは, カイラル微分作用素の層の大域切断として現れる擬平滑頂点代数の, 最初の例を与える. また, 我々は, Beem-Rastelli によって記述されたレベルが  $-2$  の  $SO(8)$  の単純アフィン頂点代数の自由場表示が, 層の大域切断の開集合への制限写像として得られることも示した. 西中と議論した結果, 少なくとも  $G=SL_n$  でレベルが  $-n+1$  の時には, base affine space 上のカイラル微分作用素の層の大域切断は4次元理論から来ているものと考えられることが分かった.

## 5. 今後の計画

上に述べた2)の結果は, 一般に4次元理論から来る擬平滑頂点代数のウエイト表現の圏が良い構造を有していることを示唆している. 今後は, これをより一般の擬平滑頂点代数に対して確かめるとともに, ウエイト表現の圏のモノイダル構造及び, 4次元理論のクーロン枝との関係を研究する. また, 上に述べた1), 3)の結果は, 4次元理論から来る擬平滑頂点代数の多くが Beilinson-Bernstein 型の局所化, すなわちある代数多様体上の頂点作用素代数の層の大域切断として実現できることを示唆している. これが事実だとすると, 物理学者によってその存在が予想されている自由場表示の存在は, 単に頂点作用素代数の層の大域切断, 開集合への制限写像であると自然に理解できる. そこで今後は, より一般の4次元理論から現れる頂点代数に対して Beilinson-Bernstein 型の局所化の実現を行うとともに, その実現から可能になる幾何学的手法を用いて大域切断として現れる擬平滑頂点代数の表現論の研究を行う. 以上の研究の実行のためには物理学を含めた幅広い知見が必要不可欠となるため, 世界各地の専門家達と研究交流や情報交流, 議論のためのセミナーや研究集会 (国内, 国際), チュートリアル的な集会などを適宜開催する.

## 6. これまでの発表論文等 (受賞等も含む)

- 1) Nakanishi, T., Nishinaka, T. S1 reduction of 4D  $N=3$  SCFTs and squashing independence of ABJM theories. *J. High Energ. Phys.* 2023, 255 (2023).
- 2) Kimura, T., Nishinaka, T. On the Nekrasov partition function of gauged Argyres-Douglas theories. *J. High Energ. Phys.* 2023, 30 (2023).
- 3) Kawasetsu, K., Ridout, D. & Wood, S. Admissible-level  $sl_3$  minimal models. *Lett Math Phys* 112, 96 (2022).
- 4) T. Arakawa, J. van Ekeren and A. Moreau, On the nilpotent orbits arising from admissible affine vertex algebras, *Proc. Lond. Math Soc.*, Volume 125, 3, 2022, 681-699.
- 5) M. Buican, H. Jiang, and T. Nishinaka, Spin thresholds, RG flows, and minimality in 4D  $N=2$  QFT, *Phys. Rev. D* 105, 085021.
- 6) T. Arakawa, T. Creutzig and B. Feigin) Urod algebras and Translation of W-algebras, Forum of Mathematics, *Forum of Mathematics, Sigma*, Volume 10, 2022, e33.
- 7) K. Kawasetsu, Relaxed highest-weight modules III: Character formulae, *Adv. Math.* 393, 2021.
- 8) A. Babichenko, K. Kawasetsu, D. Ridout & W. Stewart, Representations of the Nappi-Witten vertex operator algebra. *Lett Math Phys* 111, 131 (2021).
- 9) C.-H. Lam and H. Yamauchi, The Conway-Miyamoto correspondences for the Fischer 3-transposition groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 375 (2022), 2025-2067.

## 7. ホームページ等

<https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~arakawa>