

令和 6 年 5 月 11 日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K01403

研究課題名（和文）微分不可能な系における偏微分方程式の消費者理論・計量経済理論分野への応用について

研究課題名（英文）On Applications for partial differential equations in non-smooth systems to consumer theory and econometric theory

研究代表者

細矢 祐誉（Hosoya, Yuhki）

中央大学・経済学部・教授

研究者番号：30383954

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：2024年現在、Economic Theory誌に論文「Non-Smooth Integrability Theory」が掲載されている。こちらは現在電子版のみであって、紙での正式な出版はもう少し後になるが、研究成果としては確定済みである。この論文は本研究の集大成的なものとして位置づけることができ、この論文の出版を以て、本研究課題は成功裏に終了したと研究代表者は考えている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一般的に消費者の好みは、対応するデータがないため、推定が困難であることが知られている。本研究課題の成果によって、この消費者の好みの理論的対応物である効用関数を、購買行動の理論的対応物である需要関数から逆算することが可能になった。これはつまり、購買行動を用いて、適切に消費者の好みを推定することが可能になったということを意味する。

研究成果の概要（英文）：As of 2024, the paper "Non-Smooth Integrability Theory" is published in Economic Theory. This paper is currently only available in electronic form, and will not be officially published in paper until a little later, but it is a confirmed result of this research. This paper can be regarded as the culmination of this research, and the principal investigator believes that this research project has been successfully completed with the publication of this paper.

研究分野：ミクロ経済学

キーワード：積分可能性理論 消費者理論 均衡理論 意思決定理論 微分方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

### 1. 研究開始当初の背景

本研究の前身となる Hosoya (2017, J. Math. Econ)において、すでに効用関数を需要関数から逆算する手法については一定の成果が得られていた。また、その計算法はある位相のペアについて連続であることも証明できていた。研究代表者は、この理論を効用関数の推定問題に用いるという応用を考えていた。一般に、消費者の好みを表現する効用関数は、直接的に推定できるような対応するデータが存在せず、したがって購買行動から間接的に推定するしかない。そこで本理論を用いれば、需要関数の推定値から効用関数の推定値を計算する手法を提供できるため、需要関数さえ推定すれば問題は解決する。実際にこの推定手法が有効になるためには、需要関数の推定誤差が小さければ効用関数の推定誤差も小さい必要があるが、これに対応するのが上述の連続性である。

しかしながら、この先行研究では需要関数の空間に局所  $C^1$  位相が用いられていた。これほど強い位相に対応する需要関数の推定手法は非常に乏しく、実用性に欠ける。そこで需要関数の空間に与えられる位相を弱めて同様の結果を導出したいが、そうなると今度は微分可能な需要関数がほとんど存在しない空間で議論することになるため、需要関数の微分可能性を課すことがナンセンスになる。この問題を解決するため、まずは需要関数の微分可能性の仮定を取り除いて先行研究の結果を導出し直し、それから連続性の結果を示す必要があった。

### 2. 研究の目的

上述の背景によって、目標となったのは次の二つである。第一に、微分可能とは限らない需要関数から効用関数を逆算する手続きを与えること。第二に、その逆算手続きの連続性を保証すること。

後者については、Hosoya (2017)の時点からすでに、その証明に本質的に必要な箇所は局所リプシッツ条件だけであることに気がついていて、したがって難しいと考えていたのは前者、つまり、微分可能とは限らない需要関数から効用関数を適切に逆算することであった。このために必要なのは、Frobenius の定理とそれに関連する偏微分方程式の解の存在定理である。これを解決することが当面の課題であった。

### 3. 研究の方法

本研究は純粋に理論的な研究であるため、原則として証明を考えることだけが研究の骨子であった。参考とした文献もあるが、基本的には最後には自分で新しい結果を証明することでその目的を達成することになった。

### 4. 研究成果

まず、研究目的の第一の方については Hosoya (2021, Operat. Res. Forum)において部分的に解決された。この論文では、局所リプシッツという条件を満たす需要関数が、対応する効用関数を計算できるための必要十分条件が示されている。この結果と平行して、そもそも需要関数に対応する選好関係が一意的であるための条件を探った論文が Hosoya (2020, J. Math. Econ)として出版されている。この一意性は、計算の可能性のために絶対必要なものであったが、条件は所得リプシッツ条件であった。所得リプシッツ条件は局所リプシッツ条件を少し緩めた条件であるが、所得リプシッツ条件だけだとスルツキー行列をほとんどすべての点で定義することすらできない。したがって逆算の可能性だけを議論しているときには所得リプシッツ条件で済むが、実際の逆算のためには局所リプシッツまで仮定を強化する必要があった。この仮定の下で最終的に問題を解決した論文は Hosoya (2024, Econ. Theory)である。この論文では、局所リプシッツな需要関数の候補について、それが対応する効用関数を持つための条件、効用関数を計算するための手法、その手法によって計算される効用関数の需要関数に関する連続性が証明されている。特筆すべきは連続性に対応する位相で、効用関数の位相は局所一様位相だが、需要関数の位相は局所一様位相、あるいは各点収束位相である。先行研究、たとえば Hosoya (2015, Adv. Math. Econ)や Hosoya (2017, J. Math. Econ)などでは、需要関数の位相に強い位相を入れなければ結果が証明できなかったのだが、本稿では需要関数の位相の方が効用関数の位相よりも弱いことに特徴がある。これによって、当初の研究計画は完全に達成された。

一方、本研究の途中で研究のために考察を深めた結果、その周辺にある消費者理論、意思決定理論、均衡理論に関係する論文が派生的に多く生み出された。北星学園大学の虞朝聞氏との共著論文である Yu and Hosoya (2022, J. Math. Econ)は非模索過程理論における Smale (1976, J. Math. Econ)の成果を強化したものであり、そこでの微分方程式の取り扱いには本研究課題の考察が非常に有効であった。また Hosoya (2022, J. Math. Econ)は、Alt (1936)から始まる基数的効用の理論について、Shapley (1975)の示した条件で効用関数の存在を特徴づけること、及び

その関数が凹関数であるための条件を特定したものである。これも、本研究課題を通じて消費者理論の洞察を深めたことが、この研究につながった。また、微分方程式についての知見を増やしたことは、まったく別の理論への洞察を深めることにつながり、Hosoya (2023, Physica D)におけるハミルトン=ヤコビ=ベルマン方程式の深い洞察を生み出す契機にもなった。これらは本研究課題と直接関連するものではないが、周辺分野において重要な結果であり、また本研究課題に取り組まなければ決して完成しなかったであろうという意味で、本研究課題の成果の一部と捉えることが可能であると思われる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 Yuhki Hosoya	4. 巻 2
2. 論文標題 A Rigorous Proof of the Index Theorem for Economists	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Communications in Economics and Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 11-30
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.50906/cems.2.0_11	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hosoya Yuhki	4. 巻 446
2. 論文標題 On the basis of the Hamilton?Jacobi?Bellman equation in economic dynamics	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Physica D: Nonlinear Phenomena	6. 最初と最後の頁 133684 - 133684
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.physd.2023.133684	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Yuhki Hosoya	4. 巻 2022
2. 論文標題 Differential characterization of quasi-concave functions without twice differentiability	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Optimization Theory	6. 最初と最後の頁 2022-21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.23952/cot.2022.21	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hosoya Yuhki	4. 巻 2
2. 論文標題 Consumer Optimization and a First-Order PDE with a Non-Smooth System	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Operations Research Forum	6. 最初と最後の頁 no data
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s43069-021-00104-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yu Chaowen, Hosoya Yuhki	4. 巻 99
2. 論文標題 Continuous adjustments and Smale's non-tatonnement processes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Economics	6. 最初と最後の頁 no data
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmateco.2021.102619	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hosoya Yuhki	4. 巻 98
2. 論文標題 An axiom for concavifiable preferences in view of Alt's theory	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Economics	6. 最初と最後の頁 no data
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmateco.2021.102583	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hosoya Yuhki, Yu Chaowen	4. 巻 10
2. 論文標題 On the approximate purification of mixed strategies in games with infinite action sets	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Economic Theory Bulletin	6. 最初と最後の頁 no data
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40505-022-00219-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hosoya Yuhki	4. 巻 6
2. 論文標題 Equivalence between Nikliborc's theorem and Frobenius' theorem	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Pure and Applied Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 719-741
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Yuhki Hosoya
2. 発表標題 Violation of the Hamilton-Jacobi-Bellman Equation in Economic Dynamics
3. 学会等名 ORCOS: VC2022 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 細矢祐誉
2. 発表標題 On the Uniqueness and Stability of the Equilibrium Price in Quasi-Linear Economies
3. 学会等名 第28回DCコンファレンス
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 細矢祐誉
2. 発表標題 Non-Smooth Integrability Theory
3. 学会等名 日本経済学会2022年度秋期大会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 細矢祐誉
2. 発表標題 On the Uniqueness and Stability of the Equilibrium Price in Quasi-Linear Economies
3. 学会等名 数理経済学会2022年度研究集会「数理経済学とその周辺」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 細矢祐誉
2. 発表標題 On the Uniqueness and Stability of the Equilibrium Price in Quasi-Linear Economies
3. 学会等名 日本経済学会2021年度秋期大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 細矢祐誉
2. 発表標題 The Axiom for Concavifiable Preference in View of Alt's Theory
3. 学会等名 数理経済学会研究集会「数理経済学とその周辺」
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------