

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2021～2023

課題番号：21K01422

研究課題名(和文) 情報量に基づく停止時刻を用いたゴルトン=ワトソン分枝過程の統計的逐次解析

研究課題名(英文) Statistical sequential analysis on Galton-Watson branching processes by stopping times based on information

研究代表者

永井 圭二 (Nagai, Keiji)

横浜国立大学・大学院国際社会科学研究院・教授

研究者番号：50311866

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：データの観測が逐次的に行われる状況を想定して統計的推測を行う分野に統計的逐次解析がある。その特徴は停止時を用いて推定や検定を行うことである。本研究ではウイルスの感染者数やSNSによる情報の拡散といった現象に使われる分枝過程に統計的逐次解析の手法を適用する。特に分枝過程における臨界性の検定問題が、自己回帰過程における単位根検定の問題と同様な数学的構造を持つことに着目して、問題を解決する。分枝過程における3つの状態、劣臨界的な状態、臨界的な状態、優臨界的な状態は、それぞれ、自己回帰過程における定常な状態、単位根を有する状態、爆発的な状態に相当し、数学的には同等な手法が適用できる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究ではウイルスの感染者数やSNSによる情報についての初期段階の拡散現象に使われる分枝過程に統計的逐次解析の手法を適用した。分枝過程における2つの状態、劣臨界的な状態、臨界的または優臨界的な状態は、それぞれ、感染や拡散の収束、感染や拡散の拡大に相当し、それらの状態の判定を迅速にかつ正確に行う手法を提案することは社会的意義が大きい。また本研究が提案する手法は、逐次解析に局所パラメータを導入して、検定方法としては一様最強力不変検定という最適性を示し、推定方法としては二乗損失関数に対する最小リスク共変推定という最適性を示した点に、大きな学術的意義があると考えられる。

研究成果の概要(英文)：Sequential statistical analysis is a field that deals with statistical inference in situations where data is observed sequentially. Its characteristic feature is using the stopping time for estimation and testing. In this study, we apply the methods of sequential statistical analysis to branching processes, which are used to model phenomena such as the number of virus infections or the spread of information via social networks. In particular, we focus on the problem of testing for criticality in branching processes, noting that this problem shares a similar mathematical structure with the unit root testing problem in autoregressive processes. We address this problem by leveraging the analogy. The three states in branching processes; (i) subcritical, (ii) critical, and (iii) supercritical; correspond respectively to (i) stationary, (ii) unit root, and (iii) explosive states in autoregressive processes, allowing the application of mathematically equivalent methods.

研究分野：経済統計

キーワード：逐次解析 非エルゴード的確率過程 観測フィッシャー情報量 時間変更によるブラウン運動 二乗ベッセル過程 ベッセル過程 一様最強力不変検定 一様最小リスク共変推定

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

一階の自己回帰過程 (first order autoregressive process; AR(1)) の自己回帰係数に 1 に近い局所パラメータ (local-to-unity) を仮定すると、極限過程は OU 過程 (Ornstein-Uhlenbeck process) となることはよく知られている。極限の OU 過程における尤度に関してのドリフトパラメータ (AR(1) 局所パラメータ) の最尤推定量が、単位根検定の DF (Dickey-Fuller) 係数検定統計量の極限であり、DF 検定では帰無仮説を単位根とするときのその分布が棄却域を定める。同様に移民項を有するゴルトン=ワトソン分枝過程の子孫分布の期待値 (基本再生産数) に対し 1 に近い局所パラメータ (local-to-unity) を仮定すると、極限過程は CIR 過程 (Cox-Ingersoll-Ross process) となることはよく知られている。CIR 過程における尤度についての最尤推定量が臨界性検定の検定統計量の極限であり、帰無仮説を臨界的状態とするときのその分布が棄却域を定める。本研究では、基本再生産数に局所パラメータを設定することで、分枝過程の極限の尤度での観測 Fisher 情報量に収束する離散過程を観測 Fisher 情報量とみなし、それに基づく停止時刻を定め逐次的な臨界性検定および局所パラメータの逐次推定を考察する。

2. 研究の目的

本研究課題の核心は、研究代表者がおこなってきた自己回帰過程の統計的逐次解析の研究をもとに、オンライン観測されるゴルトン=ワトソン分枝過程の臨界性検定、特定化、推定、変化点探索に対して統計的逐次解析の手法を確立する点であった。移民項のない、もっとも簡単なゴルトン=ワトソン分枝過程を出発点として、移民項のあるゴルトン=ワトソン分枝過程に拡張してパラメータの推定、変化点の探索といった問題を Fisher 情報量に基づく停止時を用いる統計的逐次解析によって解決することであった。

3. 研究の方法

統計的逐次解析に関しては、局所パラメータを持つ AR(1) については Lai and Siegmund (1983, *Annals of Statistics*) が創始したフィッシャー情報量に基づく停止時刻を使って時間変更を行うと、Dickey-Fuller 検定統計量は、時間変更されたブラウン運動 (time-changed Brownian motion)、別名 DDS (Dambis-Dubins-Schwartz) ブラウン運動であらわされ、Z 検定統計量となることがわかっている。これと同等な手法を用いて、局所パラメータを持つ移民項を有する一階のゴルトン=ワトソン分枝過程についてもフィッシャー情報量に基づく停止時刻を使って時間変更を行うと、臨界性検定統計量は DF 係数検定統計量と同様に、時間変更された DDS ブラウン運動であらわされ Z 検定統計量となる。同様に、尤度比過程についてもドリフト付きブラウン運動の尤度比過程となり局所漸近正規性 (local asymptotic LAN) が得られる。停止時刻は DDS ブラウン運動によって駆動されるある次元の Bessel 過程であらわされ、Z 統計量と停止時刻の極限結合分布および極限結合ラプラス変換が求めることができ、その数値計算可能な表現が Pitman-Yor のベッセル橋の理論を用いて計算できる。

4. 研究成果

2021 年度日本経済学会秋季大会企画セッションにおいて、セッション名「バブルと感染爆発 - 非エルゴード的時系列の検出」と題し、金融時系列におけるバブルやウイルスの感染爆発といった非エルゴード的な状態が起こりうる時系列が観測されるときに計量経済学的手法について 3 つの報告を行った。セッション・チェアは京都大学西山慶彦氏で、研究報告者・報告題名・共同研究者は以下の通りである。

1. 人見光太郎(京都工芸繊維大学) : “Sequential Test for Unit Root in First Order Autoregressive Model.” (with K. Nagai, Y. Nishiyama, J. Tao)
2. 永井圭二(横浜国立大学:YNU): “Sequential Test for the Criticality of Branching Processes.” (with K. Hitomi, Y. Nishiyama, J. Tao)
3. 陶俊帆(京都大学経済研究所:KIER): “Time-changed Method in Non-ergodic Autoregressive Process and Branching Process.” (with K. Hitomi, K. Nagai, Y. Nishiyama)

1 では AR(1)の爆発的な場合を含む対立仮説に対して単位根逐次検定の局所漸近正規性などの統計的特徴を述べた . 2 では単位根逐次検定が数学的にはウイルスの感染に用いられる分枝過程の基本再生産数に関する臨界性検定と同等であることを示し特殊関数を用いた数値計算を行った . 3 では , 1 と 2 の両者を抽象化した非エルゴード的なドリフトを持つ二乗 Bessel 過程の推測では , 観測フィッシャー情報量に基づく停止時刻を用いて時間変更することにより , エルゴード的な Bessel 過程の推論する変換できることを述べ , それを用いて一般的に逐次的な推測方法が確立できることを示した .

下記の論文では AR(p)において爆発的な場合を含む 1 に近い局所パラメータを導入して単位根検定・爆発性検定の理論の展開と特殊関数による数値計算を行った .

Hitomi, K., Nagai, K., Nishiyama, Y., and Tao, J. (2023). “A sequential test for a unit root in monitoring a p-th order autoregressive Process,” DOI:10.1108/S0731-90532023000045A004, In book: Essays in Honor of Joon Y. Park: Econometric Theory (pp.115-153).

この論文ではまた真のモデルが有する次数より大きな次数を使っても単位根検定や爆発性検定は理論と整合的な良好な結果を生み , 局所パラメータ以外のパラメータについても 0 の推定を含む形で逐次推定がうまくできることを示している . また , 局所パラメータを有する OU 過程とほかのパラメータの推論のためのブラウン運動は独立で , AIC などによる次数選択が可能であることを示唆している .

2022 年 3 月に研究代表者の研究指導の下で横浜国立大学経済学専攻において博士号(経済学 ; 学位記番号 国府博甲第 84) を修得した金建偉 (キンケンイ ; Jin Jianwei) 氏の以下の 2 本の共同成果は , 本研究でもとめた自己回帰過程の初期値の影響を含む数学理論および特殊関数を使った数値計算に対し多くの蓄積を含む .

Jin, J., and Nagai, K., “Sequential unit root test for first-order autoregressive processes with initial values,” with Keiji Nagai. KIER Discussion Paper Series, No. 1085 (2022).

Jin, J., Hitomi, K., Nagai, K., Nishiyama, Y., and Tao, J. “Unit root tests considering initial values and a concise method for computing powers,” KIER Discussion Paper Series, No. 1084 (2022).

2022 年 3 月に研究代表者の研究指導の下で同大学院同専攻において博士号 (経済学 ; 学位記番号 国府博甲第 81) を修得した唐越之 (トウエツシ ; tang yuezhi) 氏の博士論文からの学会報告

Tang, Y. and Nagai, K. “Tests of Criticality for Branching Process with Immigration,” 第 30 回関西計量経済学研究会 , 大阪大学 , 2023 年 1 月 7 日

では , 本研究で求められた結果を数多く含んでいる . すなわち , 学会報告では , 自己回帰過程の極限である OU 過程および移民項のある分枝過程の極限である CIR 過程を含む二乗 Bessel 過程とその観測 Fisher 情報量による時間変更である Bessel 過程の理論と特殊関数による数値積分の方法について詳述した . その方法は多くの非エルゴード的問題の解決に役立つと考えられる .

局所パラメータを定式化して , 停止時刻を用いて推定・検定する際に避けては通れない検定の不変性 (invariance) と推定の共変性 (equivariance) については , 以下の 2 つの学会報告ではそ

れぞれ逐次単位根検定の一様最強力不変検定の性質と局所パラメータに対する逐次推定量の最小リスク共変推定の性質を示した。

Tao, J., Hitomi, K, Nagai, K. and Nishiyama, Y. (2023). “An optimal invariant sequential unit root test,” Summer Econometrics Forum, August 9, 2023, University of Tokyo.

Nagai, K., Nishiyama, Y., Hitomi, H., and Tao, J. “Local Asymptotic Optimality of Equivariant Sequential Estimation in Autoregressive Process,”第 30 回関西計量経済学研究会，広島大学，2024 年 1 月 6 日

これらについては，同等な研究が局所パラメータを持つ分枝過程についても示すことができることがわかっているが，研究成果の報告・発表までには至らず，本研究成果報告書に含めることができなかった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Kohtaro Hitomi, Keiji Nagai, Yoshihiko Nishiyama, and Junfan Tao	4. 巻 Vol. 45A
2. 論文標題 A Sequential Test For a Unit Root in Monitoring a p-th Order Autoregressive Process	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Advances in Econometrics	6. 最初と最後の頁 115 - 153
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1108/S0731-90532023000045A004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Jianwei Jin, Kohtaro Hitomi, Keiji Nagai, Yoshihiko Nishiyama, and Junfan Tao	4. 巻 No. 1084
2. 論文標題 Unit root tests considering initial values and a concise method for computing power	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 KIER Discussion Paper Series, Kyoto University	6. 最初と最後の頁 1-13
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Jianwei Jin, Keiji Nagai	4. 巻 No. 1085
2. 論文標題 Sequential unit root test for first-order autoregressive processes with initial values	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 KIER Discussion Paper Series, Kyoto University	6. 最初と最後の頁 1-16
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Junfan Tao, and Keiji Nagai	4. 巻 2020-CEGS-05
2. 論文標題 Sequential tests for criticality of branching process with immigration	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discussion Paper Series, CEGS, Yokohama National University	6. 最初と最後の頁 1-14
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

[学会発表] 計12件(うち招待講演 3件/うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Junfan Tao and Keiji Nagai
2. 発表標題 An application of law of integrated logarithm to Dickey Fuller test
3. 学会等名 第31回関西計量経済学研究会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Keiji Nagai, Yoshihiko Nishiyama, Kohtaro Hitomi, and Junfan Tao
2. 発表標題 Local Asymptotic Optimality of Equivariant Sequential Estimation in Autoregressive Process
3. 学会等名 第31回関西計量経済学研究会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Keiji Nagai
2. 発表標題 Local Asymptotic Optimality of Equivariant Sequential Estimation in Autoregressive Process
3. 学会等名 関西計量経済学研究会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Tao, J., Hitomi, K, Nagai, K. and Nishiyama
2. 発表標題 An optimal invariant sequential unit root test
3. 学会等名 Summer Econometrics Forum
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 金建偉
2. 発表標題 Unit root tests with initial values and a concise method for computing powers
3. 学会等名 第30回関西計量経済学研究会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 唐越之
2. 発表標題 Criticality tests for branching process with immigration
3. 学会等名 第30回関西計量経済学研究会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Keiji Nagai, Kohtaro Hitomi, Yoshihiko Nishiyama, and Junfan Tao
2. 発表標題 Sequential criticality test for branching process with immigration
3. 学会等名 63rd International Statistical Institute World Statistics Congress 2021 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Keiji Nagai, Yoshihiko Nishiyama, Kohtaro Hitomi, and Junfan Tao
2. 発表標題 Sequential test for a unit root in monitoring a p-th order autoregressive process
3. 学会等名 Japanese Economic Association Spring Meeting
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Keiji Nagai, Yoshihiko Nishiyama, Kohtaro Hitomi, and Junfan Tao
2. 発表標題 Criticality test for branching processes with immigration
3. 学会等名 Japanese joint statistical meeting 2021 Japanese joint statistical meeting 2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Keiji Nagai, Yoshihiko Nishiyama, Kohtaro Hitomi, and Junfan Tao
2. 発表標題 Time-changed method in non-ergodic autoregressive process and branching process
3. 学会等名 Japanese Economic Association Autumn Meeting (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Keiji Nagai, Yoshihiko Nishiyama, Kohtaro Hitomi, and Junfan Tao
2. 発表標題 Sequential Test for Unit Root in First Order Autoregressive Model
3. 学会等名 Japanese Economic Association Autumn Meeting (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Keiji Nagai, Yoshihiko Nishiyama, Kohtaro Hitomi, and Junfan Tao
2. 発表標題 Sequential Test for the Criticality of Branching Processes
3. 学会等名 Japanese Economic Association Autumn Meeting (招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------