

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：13501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K02573

研究課題名（和文）文字式を活用して問題を解決する力を育成する学習指導：理解の困難さの分析と授業実践

研究課題名（英文）Teaching and learning to develop the ability to solve problems using algebraic expressions: Analysis of difficulty in understanding and lesson study

研究代表者

清水 宏幸 (Shimizu, Hiroyuki)

山梨大学・大学院総合研究部・教授

研究者番号：80562446

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は、学校数学において文字式を活用して問題解決を図る場面で生徒がどのようなところにつまずき、困難があるのかを明らかにし、その結果に基づいて文字式を活用して問題解決を図る学習指導を提案することである。本研究では、全国2地区で高校生を対象に質問紙調査を実施した。この調査では、高校生でも式をひとまとまりとみることに困難があることがわかり、一定数の生徒は学習を進めていっても解消されないままであることが明らかとなった。このことを踏まえ中学校段階で式をひとまとまりとみることを大切にした指導が必要であるとし、方程式の利用の場面において等しい数量の関係を捉えることをねらいとした授業実践を実施した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

高校生に対して式をひとまとまりとみるといった文字式の見方やその理解を明らかにする調査は、これまで行われていなかった。中学校段階では、式をひとまとまりとみることの困難性は明らかとなっているので、その調査と同じ問題で行うことによって、その困難性が高等学校へ進学し数学の学習を進めていくうちに、解消していくのか、それとも解消するために何らかの手をうつ必要があるのかを明らかにすることは、生徒も学びから学習指導を提案するために価値のあることであると考え。本研究で、一定数の生徒に、その困難性が残ることが明らかとなり、中学校段階での指導を充実させることが明らかになったという点で研究の意義があると考え。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is to clarify where students stumble and have difficulty when trying to solve problems using letter expressions in school mathematics, and based on the results, to learn how to use letter expressions. The aim is to propose learning guidance that aims to solve problems.

In this study, we conducted a questionnaire survey targeting high school students in two districts across the country. This survey revealed that even high school students have difficulty viewing formulas as a whole, and that a certain number of students remain unresolved even as they progress in their studies. Based on this, we decided that instruction that emphasizes viewing equations as a unit is necessary at the junior high school level, and we implemented lessons aimed at understanding the relationships between equal quantities when using equations.

研究分野：数学教育学

キーワード：高校生の文字式の理解 式をひとまとまりとみること 方程式の利用

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

中学生の文字式の理解を探るこれまでの研究で特定している文字や文字の意味の解釈の誤りについて、高等学校でも同様の調査を行い、特定できているつまずきが解消するのか、あるいは後々まで残っているのか、理解の様相の一端をつかむことを目指す。

本研究の学術的独自性は2つある。1つ目は、中学生を中心に探ってきた文字式の理解を、高校生にも対象を広げ、系統的に探っていくことである。

2つ目は、文字式を利用する場面において、文字式（例えば、 $3a$ や $5x-2$ の式の意味や $5x$ と -2 の意味）の理解と、その文字式における文字（例えば、 $3a$ における文字 a や $5x-2$ における文字 x の意味）の理解を同時に分析することによって、児童生徒がどのようなところに理解の困難点があるのかを具体的な1つの問題において顕在化することである。その明らかにした課題を克服するための学習指導を構想して実践し、授業の有効性を検証する。

2. 研究の目的

本研究の目的は、学校数学において、文字式を活用して問題解決を図る場面で生徒がどのようなところにつまずき、困難を感じているのかを明らかにするとともに、その生徒の理解に基づき、文字式を活用して問題解決を図る学習指導を提案することである。

3. 研究の方法

本研究では次のような方法をとる。すなわち、調査問題を開発し、その問題を用いて高校生の文字式の理解についての調査を行う。数学につまずきを見せる中位程度の生徒（高校1年生、2年生）を対象とし学校を選定する。質問紙調査を実施する学校を選定に当たっては、2つの地区から設定し、サンプル数をそれぞれ100～200とする。分析の方法として、例えば、文字式を解釈する場面で文字に対して意味付けを行えていない生徒など、記述に特徴を分析する。調査問題のうち関連のある2つの問題のクロス集計を行い、文字式の理解を精緻に分析する。調査結果から得られた高校生の文字式に対する課題を明らかにし、それを克服しなおかつ文字式を活用して問題解決を図る教材を検討し、実際に中学校1年生と対象として授業実践を行い、その検証と得られた知見を発表する。

4. 研究成果

(1) 高校生調査

① 本調査の目的・方法

本研究では、中学生の文字式の理解の研究をさらに進め、高等学校へ行って数学の学習を進めていくうちに、この困難性は解消していくのか、また、解消されないまま残り、そのことが他の場面に影響するのかという新たなリサーチクエスチョンを設定した。

これまでの文字式の理解研究では、文字を本格的に学習し始める中学生に焦点を当てて、その理解を探る研究は多く存在するが、高校生を対象にした文字式の理解の研究は見当たらない。高校数学は、学習する内容が難しく、多くの生徒にとってその内容を理解することに困難が伴うことは知られているが、内容の理解以前に、どの分野を学習するにも常に必要となる文字式を上手く使いこなせないことから、数学を苦手とし、数学嫌いに陥っている可能性が少なからずあると考えられる。特に、中学生と同様に、式をひとつのまとまりとして操作したり、読み取ったりすることに困難性があるのではないかと考えており、その際、どのようなところに生徒が抵抗を感じているのかや、どこに誤概念が生じているのかは解明されていない部分が多い。本研究は、その一端を明らかにしようとしていることが、これまでの研究とは異なっている。

② 分析する問題と結果

(a) 調査問題

問題セットのうち、問題5と7を取り挙げる。具体的な問題は以下の通りである。

問題5	$x-1=t$ とする。このとき、 $x\sqrt{x-1}$ を t の式で表してください。
問題7	さちこさんは文字と式の勉強をしているとき、次のような問題に出会いました。 $a+3b+5c=25$ のとき $a+3b+5c-10$ の値を求めなさい。 この問題を見てさちこさんはこう考えました。 <さちこさんの考え> 「 a と b と c に入る数がそれぞれいくつになるかわかっていないので、 $a+3b+5c-10$ がいくつになるかわからない。だから答えは、わからない。」 <input type="radio"/> このさちこさんの考えにあなたはどう思いますか。これについてあなたの考えを書いてください。 <input type="radio"/> あなただったらこの問題をどう解きますか。解いてください。

(b) 調査結果

問題5、問題7について、それぞれ正答、誤答の解答類型を作成し、採点では生徒の解答を分類する作業を行った。そして、それぞれの解答類型の反応率を表1、表2のように表した。

表 1. 問題 5 の解答類型と反応率

番号	解答類型	反応率(%)
1	$(t-1)\sqrt{t}$ (同値の式もふくむ)	27.8
2	$t-1\sqrt{t}$	24.6
3	上記番号 1, 2 以外の t の式	9.5
4	x が残っている式	19.8
99	上記以外の解答	11.9
0	無解答	6.4

表 2. 問題 7 の解答類型と反応率

番号	賛成・反対等	解答類型	反応率(%)
1	賛成	文字式により 15 を導く	1.6
2		$a+3b+5c=25$ を満たす a, b, c を求めてそれを代入して 15 を導く	0.0
3		誤答 (答えが求まっていないものも含む)	10.3
4		無解答	4.0
5	反対	文字式により 15 を導く	57.9
6		$a+3b+5c=25$ を満たす a, b, c を求めてそれを代入して 15 を導く	1.6
7		誤答 (答えが求まっていないものも含む)	12.7
8		無解答	0.8
9	どちらでもない	文字式により 15 を導く	0.8
10		$a+3b+5c=25$ を満たす a, b, c を求めてそれを代入して 15 を導く	1.6
11		誤答 (答えが求まっていないものも含む)	3.2
12		無解答	0.8
99	上記以外の解答		1.6
0	無解答		3.2

表 3. 問題 5 と問題 7 のクロス集計 (反応率%)

	1	2	3	4	99	0	総計
1	0.0	0.8	0.0	0.8	0.0	0.0	1.6
3	0.8	4.0	0.8	2.4	1.6	0.8	10.3
4	0.0	0.0	0.0	3.2	0.0	0.8	4.0
5	24.6	12.7	4.8	10.3	3.2	2.4	57.9
6	0.0	0.8	0.0	0.0	0.8	0.0	1.6
7	0.0	4.0	2.4	0.0	6.4	0.0	12.7
8	0.0	0.0	0.0	0.8	0.0	0.0	0.8
9	0.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8
10	0.0	0.8	0.8	0.0	0.0	0.0	1.6
11	0.0	0.8	0.8	1.6	0.0	0.0	3.2
12	0.0	0.0	0.0	0.8	0.0	0.0	0.8
99	1.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.6
0	0.0	0.8	0.0	0.0	0.0	2.4	3.2
総計	27.8	24.6	9.5	19.8	12.0	6.4	100.0

問題 7 は, $a+3b+5c-10$ の値を求めるために, $a+3b+5c$ をひとまとまりとみて, これが 25 と等しいことから, $a+3b+5c$ を 25 に置き換え, $25-10=15$ と答えを導く. ここでは, 複数の項をもつ文字式を 1 つの数に置き換え, 文字式に代入することが求められている. このような代入の仕方を求めている問題 7 と, 複数の項をもつ文字式を 1 つの文字に置き換えたり, 1 つの文字を複数の項をもつ文字式に置き換えたりすることが必要となる問題 5 との誤答の関係を調べるため, クロス集計を行った. 問題 5 と問題 7 の 2 つの問題の解答類型をクロス集計すると, 表 3 の結果となった. 表 3 の網かけの部分に注目する. これらのセルは問題 5 での番号 4 (x が残った式で表している記述) の解答のうち, 問題 7 で, さちこさんに賛成と答えた生徒と, さちこさんに反対と答えて, 式の値を正しく記述した生徒の割合である. 問題 5 における番号 4 の反応率 19.8%のうち, 16.7%がこれらの番号の解答に集中している. 問題 5 の番号 4 の生徒のうち, 番号 3 では 3 名中 2 名, 番号 4 では 4 名全員, 番号 5 では 13 名中 10 名が xt と解答している.

特に、番号5に多くの割合が集中している。問題7は正答しているのも関わらず、問題5でxが残った式を解答している生徒が存在していることが注目される。この解答の生徒は、文字式で用いられている文字の具体的な値は不問にして、複数の項をもつ文字式をひとまとまりとみて1つの文字に置き換えることはできているが、同じ式の中で1つの文字を複数の項をもつ文字式に置き換えることができていると考えられる。このように柔軟な文字式の扱いができない生徒が一定数存在していることが明らかとなった。

(c) 調査結果の考察

中学生調査と同様な視点で、問題を開発し、質問紙調査を実施した。そして、中学生にとって困難である、式をひとまとまりと見ることが高校生になって解消できるのかどうかを生徒の解答を類型に分けて分析した。

その結果、高校生は、 $a+3b+5c=25$ を満たすa, b, cの値の組を見つけることはできてはいるが、文字式に含まれている文字の値に着目することに止まり、式をプロダクト化できず、ひとまとまりとみることができていない生徒が一定数存在することが明らかとなった。また、一旦プロダクトの見方によって式をひとまとまりと見ることができても、それをプロセス化することができない実態も浮かび上がった。

これまで高校生の文字式の理解についての実態はほとんど明らかとなっていない。本調査では、指導している側では当然できているだろうとみていた式をひとまとまりとみることの困難があることがわかり、一定数の生徒は、学習を進めていってもこのことが解消されないままであることが明らかとなった。そして、これらの困難性が、目的に応じて、複数の項をもつ文字式を1つの文字に置き換えたり、1つの文字を複数の項をもつ文字式に置き換えたりするといったプロセスとプロダクトの見方を柔軟に切り替えて処理するといった場面で顕著に表れることが明らかとなった。

以上より、式をひとまとまりとみることが、教師側がこの困難性を意識して指導する必要があることが明らかとなった。この成果は、以下の論文にまとめている。

清水宏幸(2024). 高校生における文字式の理解に関する研究-式をひとまとまりとみることの焦点を当てて-, 山梨大学教育学部紀要, 34, 63-74.

(2) 中学校における授業実践

① 授業の意図

高校生調査より明らかとなった、目的に応じて、複数の項をもつ文字式を1つの文字に置き換えたり、1つの文字を複数の項をもつ文字式に置き換えたりするといったプロセスとプロダクトの見方を柔軟に切り替えて処理するといった場面で生徒が困難を示すこと、すなわち、式をひとまとまりとみることの困難性から、教師側がこのことを意識して指導する必要があることが示唆された。

つまり、高校生になり、数学の学習を進めていくうちに、自然に解消するものではないことが明らかとなり、中学校段階から意図的に式をひとまとまりとみることが指導することが大切であるということである。

② 式をひとまとまりと見ることが意図した実践授業

授業は、S市立K中学校のY.O教諭に協力してもらい、授業を構想し実践した。

(a) 生徒に提示する問題

折り紙を何人かの子どもに配ります。3枚ずつ配ると31枚余りました。2枚追加して5枚ずつ配ると3枚足りませんでした。子どもの数と折り紙の枚数を求めなさい。

(b) 本実践の工夫

文字を使って方程式を立式する前に、具体的な数で操作する。具体的には、以下のような場面を設定する。

④ 折り紙の総数を表すフレーズ型の式を具体的な数で考えること

「数字と文字の積の形で表された文字式をひとまとまりとみられない」ことについての困難性の解消の一助となると考える。

3×1 や 3×2 , 3×3 , $3 \times 4 \dots$ の結果は配る枚数を表すから、 $3 \times x$ も子どもに配る折り紙の枚数を表すと理解を促すことができると考える。

⑤ 1人に3枚ずつ配る場合と1人に5枚ずつ配る場合の2通りの場合の折り紙の総数を具体的な数で考えることによって、方程式を立式すること

「文字xが『変数』であり『未知数』でもあること」の理解に繋がると考える。3枚配るときと5枚配るときの余った枚数とたりない枚数まで含めて考えることによって、全体の折り紙の枚数は決まっているので、2つの場合の折り紙の枚数は等しくなるはずであることに気づくことができるようにする。折り紙の総数が等しくなる時の子どもの人数がわかっていないので、その数をxとする(文字を未知数と捉える)。

③ 授業のまとめ

本授業実践は、研究でつかんだ、式をひとまとまりと見られないことについて、授業でどのように解消していくかを考察することを目的とした。もちろんこの困難性は、1時間、2時間の授業を工夫したからといって、解消できるものではない。しかし、どこに意識をもって授業に継続的に取り組んでいくかを考えていききかけとするものである。今回の実践授業から次の3点

が浮かび上がった。

1 点目は、具体的な数で子どもの人数を仮定して折り紙の枚数を考察するときの活動についてである。本授業の学習指導案では、子どもの人数が、1 人であったら、2 人であったらと順に考えていくことが計画されていたが、実際には、6 人と 100 人という 2 つ場合について、どのくらいの折り紙の枚数が必要かを考えさせている。その活動は、生徒がよく取り組み、とても良かったが、その 2 つの場合を考え、折り紙を 3 枚配るときと 5 枚配る時の折り紙の枚数をそれぞれ求め、それが等しくなっていないことをおさえた上で、折り紙の総数は決まっているので、等しくならぬといけぬということを学級全体で確認する機会が必要であることがよくわかった。そして、子どもの人数を求めるためには、その折り紙の枚数を等しくなるように等式を作らぬといけぬことを意識できるようにすることが大切であることがわかった。このことから、子どもの人数を 6 人と仮定したときには、では駄目等しくならぬことの理由をしっかりと押さえることが大切であることが明らかとなった。

2 点目は、等しい数量を文字式に表して等式を作る場面での式を読む活動についてである。ここが生徒にとって最も難しいところであるが、子どもの人数を具体的な数として折り紙の枚数を考えた後、子どもの人数を x 人において方程式を作る場面において、問題文にそって同じ数量を表す 2 つのフレーズ型の式を作れば、これが等しいということはどういうことか、2 つのフレーズ型の式は問題文に戻すとどのような数量を表しているのかを、式を作るときはもちろんであるが、式を作った後でも、もう一度その式の意味を読むという活動を行うことが大切であることがわかった。式を正しく作ってれば、数量の関係を正しく捉えることができていると考えられているが、生徒は必ずしもそうではなく、問題文に出てくる数量を単につなげて式をつくらしたり、文字式を数量を捉えているのではなく、物語のように状況を表していると捉えていたりする様子が明らかとなっているので、文字式の式を読み取ることを何度も繰り返し行うことが大切であると考えられる。

3 点目は、文字式を使わずに過不足算のような算術的に答えを求める方法は、方程式を形式的に解くときの計算過程に出てくることを理解できるようにすることである。算術的な方法は、常に具体に戻って計算の意味を考えて計算するよりも、問題文に合うようにわからないものを x とおいて、等しい関係を見つけて、式を作ってしまうと、その問題が何を表そうが関係なく形式的に解くことができるという方程式のよさもこの授業を通して、生徒に理解できるようにすることができることがわかった。本格的にこの方程式のよさを感じ得るようにするのは、2 時間目以降で徐々に扱っていくことであるが、最初に文字式の表している数量をしっかりと把握して、方程式に表していくといった方法知についても指導の意図に加えることで、1 段高いレベルで方程式の利用を捉えることができることがわかった。本授業では、方程式の立式をどうするかという視点の他、方程式を立式する方法知についても視野に入れる必要があることがわかった。

④ 本研究のまとめと今後の課題

本研究では、高校生でも、中学生と同様に文字式をひとまとまりと見ることができないという理解の困難性が明らかとなった。つまり、高校生になってもこのつまづきが自然に解消するわけでないことが明らかとなったのである。高校生になって、数式を操作する機会が増え、文字式の扱いを頻繁に行っても、一定数の生徒は、この困難性が生徒自身で解消するまでには至って以内ということである。文字式を計算の過程とみる見方と文字式そのものが計算結果であるという文字式の理解の二面性が難しいことが証明できた。

このことにより、この困難性を解消するような学習指導を仕組むことが重要であることがわかり、それを解消することをねらいとした授業づくりを行った。指導の後では、生徒の見方が進展し、文字式の意味理解を図ることができ、一定の成果は上がった。しかし、本研究での指導によって、真に解消できたかどうかは長期に渡って調査を行う必要がある。それは、文字式の指導は、1 つの単元や 1 時間の授業によってその理解が深まるものではなく、数と式の領域だけでなく、図形や関数の領域等を含めたすべての数学の授業でことあるごとに繰り返し指導することによって深まり、問題解決に文字式を活用できるようになると考える。

よって、引き続き、中・高校生の文字式とその式における文字の理解に継続的に探る必要がある。また、本研究で明らかとなった、式をひとまとまりとみることができない実態に対して、さらに、中・高の接続を視点にその学習指導を引き続き探っていきたい。

引用・参考文献

- Gray, E., Tall, D. : Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25-2, 116-140. 1994.
- Kieran, C. : The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.) : *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). A Project of the National Council of Teachers of Mathematics, New York, Macmillan. 1992.
- Küchemann, D. : 8 Algebra. In K. M. Hart. (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics*: 11-16, (pp. 102-119), London, John Murray. 1981.
- Sfard, A. & Linchevski, L. : The gains and the pitfall of reification - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228. 1994.
- 清水宏幸: 文字式とその式における文字の理解に関する研究-式をひとまとまりとみることに焦点を当てて-. *日本数学教育学会誌*, 101, 11, 2-13. 2019b.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 0件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 榎本哲士・西村圭一・清水宏幸・中逸空	4. 巻 1
2. 論文標題 代数的思考におけるAcceptance of Lack of Closure	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 第55回秋期研究大会発表集録	6. 最初と最後の頁 137-140
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 清水宏幸	4. 巻 34号
2. 論文標題 高校生における文字式の理解に関する研究 - 式をひとまとまりとみることに焦点を当てて -	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 山梨大学教育学部紀要	6. 最初と最後の頁 63 - 74
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 0件／うち国際学会 0件）

1. 発表者名 清水宏幸
2. 発表標題 文字式を活用して問題を解決する学習指導
3. 学会等名 日本数学教育学会 第103回全国算数・数学教育研究（埼玉）大会講習会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 清水宏幸
2. 発表標題 文字式を活用して問題を解決する力を育成する学習指導 - 文字式の効用を意識できるように -
3. 学会等名 日本数学教育学会 第105回全国算数・数学教育研究（青森）大会講習会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 清水宏幸
2. 発表標題 文字式利用場面の指導のポイント
3. 学会等名 日本数学教育学会 第9回中学校数学授業づくり研究会
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関