様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 ２４ 日現在

機関番号： ３２６７８
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2021～2023
課題番号： ２１Ｋ０３１７２

研究課題名（和文）頂点代数上の加群の拡張とテンソル積

研究課題名（英文）Generalizations of modules over vertex algebras and their tensor products

研究代表者
田邊　顕一朗（Tanabe, Kenichiro）

東京都市大学・共通教育部・教授

研究者番号：１０３３４０３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：Vを可算次元の単純頂点代数，Gをその有限位数の自己同型群とする．既約ツイステッドV加群からなるG安定な有限集合Sを考え，Sに属する加群の直和Mを考える．GとSから定まる半単純多元環Aと，固定部分代数V^GはM上に自然に作用するが，その作用に関してSchur-Weyl型の双対性を示した．応用として，任意の既約ツイステッドV加群は完全可約V^G加群となることを示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
Vを頂点代数，GをVの自己同型群としたとき，Gによって固定されるVの元の全体V^GはVの部分代数となる．固定部分代数V^G加群は，よい性質をもつ頂点代数の構成への応用があるため，この分野の重要な研究対象となっている．既約V^G加群は，既約ツイステッドV加群の部分加群として全て得ることが出来ると予想されている．この問題に関連して，任意の既約ツイステッドV加群は完全可約V^G加群であることを示した．

研究成果の概要（英文）：Let V be a vertex algebra of countable dimension and G a finite automorphism group of V. We consider a G-stable finite set S consisting of irreducibly twisted V-modules, and take a direct sum M of all irreducibly modules in S.
The semisimple associative algebra A defined by G and S and the fixed point subalgebra V^G act naturally on M, and we show a Schur-Weyl type duality for their actions. As an application, we show that any irreducible twisted V-module is a completely reducible V^G-module.

研究分野： 頂点代数

キーワード： 頂点代数　加群　自己同型群　テンソル積

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

頂点代数は，ムーンシャイン予想の解決や 2 次元共形場理論の数学的定式化等を目的として1986 年にボーチャーズによって導入された新しい代数系である．V を頂点代数，G をその有限位数の自己同型群とし，その固定部分代数 V^G を考える．固定部分代数とその加群から，軌道体構成により新しい頂点代数が構成されるため，固定部分代数およびその加群は，この分野で重要な研究対象となっている．実際，ボーチャーズによるムーンシャイン予想の解決においては，格子頂点代数の位数 2 の自己同型による固定部分代数からムーンシャイン頂点代数が構成された．その自己同型群としてモンスター単純群が，さらにその指標としてクラインの楕円モジュラー関数が実現できたことが予想解決の鍵となっている．V^G 加群の研究では，G 加群とV 加群との関係を調べることが中心となる．V 加群は自動的に V^G 加群になっている．V^G 加群はＶ加群から構成出来るかということが問題となるが，実際にはＶ加群だけでは足りず，少なくともその拡張であるツイステッドＶ加群を用いる必要があることが分かっている．頂点代数にさらに条件を課した頂点作用素代数に対しては，さらにいくつかの条件を仮定することで，既約 V^G 加群はあるツイステッドＶ加群の部分加群になっていることが，物理学者達（ダイグラーフ‐ヴァッファ‐フェアリンデ‐フェアリンデ）によって予想されている．この予想は，安部，ドン，リィ，永友，宮本，メイソン，ヤンスクルナ，山田，筆者等によって多くの例で検証されており，また一般論が展開されている．その研究の中で，そもそもツイステッド加群の中に既約 V^G 加群が入っているのか，あるいはさらに強くツイステッド加群は完全可約 V^G 加群かという基本的な問題があった．この問題は最初，ドン‐メイソンによって研究が開始され，単純な頂点作用素代数Ｖに対しては，Ｇが可解群であるとき，V 自身は完全可約 V^G であることが示された．通常の V 加群に対しては，ドン-ヤンスクルナによって解決され，その後，宮本-筆者によって拡張されたヅー代数を導入することにより，この問題は完全に解決された．このように頂点作用素代数上の加群に対しては研究が進められてきていたが，近年，頂点作用素代数とは限らない頂点代数上の加群，あるいは頂点作用素上の弱加群の研究が活発になってきている．アフィン・リー環の一部の加群は自然に頂点作用素代数上の加群とみなせる．リー環ではホィッタカー加群と呼ばれる次数付きでない加群が重要な対象となっており，それをアフィン・リー環に付随する頂点作用素代数上の加群として調べたアダモビックの研究が，系統的に弱加群，つまり次数付きでない加群を調べた最初のもののようである．ただし，ホィッタカー加群はリー環の三角分解を用いて定義されるものであるため，リー環固有の概念であり，また既約かどうかが問題になっている．頂点作用素代数ではない頂点代数の典型例としては，正定値でない格子に付随する格子頂点代数があり，この例はやはりムーンシャイン予想の解決に用いられている．ムーンシャイン頂点代数の構成は，正定値格子であるリーチ格子が用いられているが，ボーチャーズの研究により，リーチ格子を含むランク 24 の正定値ユニモジュラー格子は，符号が(25,1)のローレンツ格子を経由して調べることが有用であることが分かっている．したがって，符号が(25,1)のローレンツ格子から構成される格子頂点代数，およびその軌道体構成により得られた代数を調べることにより，ムーンシャイン頂点代数と関連する頂点代数の有用な情報を得ることが出来ると期待される．しかしながら，頂点代数上の加群には，頂点作用素代数上の加群と違って，自然数による次数付けを課さないため，取り扱いが非常に困難なものだと考えられてきた．最近の筆者の結果により，頂点代数上の加群を調べることが可能になってきた．実際筆者によって，一般の非退化偶格子に付随する頂点代数の，位数２の自己同型による固定部分代数に対して，その既約加群が分類された．さらに，加群の完全可約性が示された．このように，頂点代数上の加群を詳しく調べる準備が整っていた．

２．研究の目的

(1) 大きな目的は，頂点代数上の加群の定義を拡張し，自由加群の構成，および加群同士のテンソル積の構成を行うことにより，頂点代数上の加群論を自由に展開するための基礎を確立することである．
(2) 加群の拡張を調べるために，まず加群の条件を少し緩めた頂点代数上の加群，もしくは頂点作用素代数上の弱加群の性質を調べる．特に格子頂点代数の部分代数の弱加群に対して，テンソル積にあたるはずのフュージョン則を調べる．また，頂点代数上のツイステッド加群を拡張した(V,T)加群の性質を調べて，既約ツイステッド加群が完全可約 V^G 加群であることを示す．

３．研究の方法

(1) 最初に頂点代数上の既約ツイステッド加群について述べる．頂点作用素代数上の加群を調べる際には，ヅー代数と呼ばれる，頂点作用素代数に付随する結合的代数を調べることが強力な手法である．しかし，頂点代数上の加群には，自然数による字数付けを課さないため，ヅー代数を用いることは出来ない．筆者によって，頂点代数上の加群を調べる新しい方法が導入され，既約加群の様子を調べることが可能になった．実際，筆者によってハイゼンベルグ頂点代数の位数 2 の元による固定部分代数上のホイッタカー型加群を分類する

ことが出来た．この結果をもとに，アダモビック‐ラム‐ペディック–ユが一般の頂点代数 V とその有限位数の自己同型群 G に対して，ツイステッド V 加群は完全可約 V^G 加群となるかという研究を開始した．これは上記の頂点作用素代数において考えられていた問題の，頂点代数における類似である．その後，ドン‐レン‐ヤンが，通常の V 加群は完全可約 V^G 加群であることを示した．この問題では，ツイステッド加群を自己同型で捻ったものを考えて，それらの直和をとる必要がある．ツイステッド加群を直和で捻ったものは，一般には異なる自己同型に付随するツイステッド加群になる．しかしながら，異なる自己同型に付随するツイステッド加群は，直和で閉じていないことから，直和をとったものは，ツイステッド加群にはならない．直和で閉じていないという性質は，加群論において致命的な欠点であるため，ドン‐レン‐ヤンは，ツイステッド加群が同じ自己同型に付随するように，自己同型が G の中心に入るという特殊な条件をつけなければならなかった．筆者は，ツイステッド加群が直和で閉じていないという問題点を解消するために，ツイステッド加群を拡張した(V,T)加群を 2015 年に導入していた．(V,T)加群は直和で閉じており，また，ツイステッド加群は，自然数 T を，付随する自己同型の位数の倍数となるようにとれば，自動的に(V,T)加群となる．さらに単純な頂点代数に対しては，自己同型が異なる既約ツイステッド加群は非同型な(V,T)加群となる．しかしながら，(V,T)加群では，対応するボーチャーズ恒等式が複雑になってしまうため，当時はその基本的な性質を導くことは困難であった．通常の加群においては，ボーチャーズ恒等式から色々な関係式が導かれるが，(V,T)加群で，対応する関係式を導くにはどうすればよいか分からなかったのである．したがって(V,T)加群に(1/T)N 次数付きという条件をつけて調べることしか出来なかった．この場合には，ヅー代数を構成することが出来，通常の頂点作用素代数の場合と同じように，ヅー代数の既約加群と既約(1/T)N 次数付き(V,T)加群とが一対一に対応することを示すことが出来た．ヅー代数の既約加群に対して，普遍的な (1/T)N 次数付き(V,T)加群を構成できるため，(V,T)加群の基本的な性質を，その普遍的な加群を調べることで得ることが出来る．その後，ハイゼンベルグ頂点代数の位数 2 の元による固定部分代数や，非退化格子の付随する頂点代数の固定部分代数の研究を通じて，頂点代数上の加群と頂点作用素代数の弱加群への理解が進んだ．頂点作用素代数上の加群を調べるさいに使うヅー代数の計算では，最終的には次数付けが必要ではあるが，途中の計算では次数付けは本質的ではなく，可算個の積が途中から全て 0 になるという性質のみで色々な関係式を得ることが出来ることに気づいた．したがって(V,T)加群の基本的な性質である，作用の結合則を示すことが出来た．この結果により，(V,T)加群が，通常の頂点代数上の加群と同程度に扱うことが可能になった．さらに，主にホップ代数において研究されていた，有限群とそれが作用する集合に付随して定義される，ある半単純多元環 A を，ドン達が頂点代数の言葉で書き表した対象を，(V,T)加群に対して定義した．有限個のツイステッド加群からなる G 安定な集合 S を取り，S に属する加群の直和を M とおく．上で述べたように M は一般にはツイステッド加群にはならないが，(V,T)加群になっている．有限群 G と集合 S から，半単純多元環 A を構成することが出来，さらに M にはこの多元環 A が自然に作用している．S への G の作用に関する軌道の代表元をとり，その代表元を，同型を除いて不変にする G の元全体からなる部分群を考える．A の既約加群はそれらの部分群の既約加群を用いて添え字づけられる．ツイステッド加群の直和 M を，A の既約加群に分解しておく．A の各既約加群に対して重複度の空間を考えると，そこには頂点代数 V^G が自然に作用する．ここまでは一般論から得られる帰結である．問題は重複度の空間が既約 V^G 加群になっているかどうかである．

(2) 一般の非退化偶格子に付随する頂点代数の，位数２の自己同型による固定部分代数に対しては，筆者によりその既約加群が分類されている．さらに，加群の完全可約性が同じく筆者によって示されている．残っている問題は，テンソル積に対応していると考えられている既約加群のフュージョン則である．研究開始時は安部(格子のランクが１の場合)および安部-ドン-リィ(一般の場合)によって既に得られていた正定値の場合のフュージョン則と同じになると思っていたが，ツイステッド加群から構成される既約 V^G 加群同士のフュージョン則は正定値の場合と同様の計算ではうまくいかないことが分かった．頂点作用素代数の加群では，制限双対をとることで，あるフュージョン則の計算が，別の加群同士のフュージョン則に帰着される．正定値の場合は，この結果を用いているが，しかし，格子が正定値でない場合は，弱加群の制限双対をとることが出来ないため，この結果を用いることは出来ない．フュージョン則が 0 になることが期待出来ない場合は，実際に対応するインタートワイニング作用素を構成する必要があるため，非常に難しい問題となるが，幸いにして，頂点代数の一般的な手法で，この場合はフュージョン則が 0 になることを示すことが出来た．

４．研究成果

(1) V を可算次元の単純な頂点代数，G をその有限次数の自己同型群，有限個のツイステッド加群からなる G 安定な集合 S を取り，S に属する加群の直和を M とおく．有限群 G と集合 S から，半単純多元環 A を構成することが出来る．M にはこの多元環 A が自然に作用している．M への A と固定部分代数 V^G との作用は可換となっている．A の各既約加群の M に

おける重複度の空間には V^G が自然に作用しているが，この作用が既約であることを示すことが出来た．さらに A の既約加群が異なれば，対応する重複度の空間は V^G 加群として非同型であることを示すことが出来た．この結果の応用として，任意の既約ツイステッド V 加群は完全可約 V^G 加群であることが分かる．

(2) 一般の非退化偶格子に付随する頂点代数の，位数２の自己同型による固定部分代数に対して既約加群のフュージョン則を決定することが出来た．正定値の場合のバカロフ–エルシンガーの結果の手法を少し修正して用いて，格子の一般の位数２の自己同型から得られる格子頂点代数の固定部分代数の既約加群を分類し，加群の完全可約性を示した．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　3件）

1．著者名 Kenichiro Tanabe	4．巻 未完
2．論文標題 The irreducible weak modules for the fixed point subalgebra of the vertex algebra associated to a non-degenerate even lattice by an automorphism of order 2 (Part 2)	5．発行年 2024年
3．雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Kenichiro Tanabe	4．巻 未完
2．論文標題 A Schur-Weyl type duality for twisted weak modules over a vertex algebra	5．発行年 2024年
3．雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Kenichiro Tanabe	4．巻 未完
2．論文標題 Fusion rules for the fixed point subalgebra of the vertex algebra associated with a non-degenerate and non-positive definite even lattice by an automorphism of order 2	5．発行年 2024年
3．雑誌名 Journal of Algebra and its Applications	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　0件／うち国際学会　1件）

1．発表者名 Kenichiro Tanabe
2．発表標題 非退化偶格子に付随する頂点代数の不変部分代数のフュージョン則
3．学会等名 2023年度日本数学会年会
4．発表年 2023年

1．発表者名 Kenichiro Tanabe
2．発表標題 Fusion rules for the vertex algebra V_{L}^{+} when L is a non-positive definite even lattice.
3．学会等名 Conference in finite groups and vertex algebras（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 Kenichiro Tanabe
2．発表標題 頂点代数上の加群のシュアー・ワイル型双対性
3．学会等名 2024年度日本数学会年会
4．発表年 2024年

1．発表者名 Kenichiro Tanabe
2．発表標題 頂点代数上の加群のシュアー・ワイル型双対性
3．学会等名 第39回代数的組合せ論シンポジウム
4．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関