

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：33903

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03191

研究課題名（和文）楕円量子トロイダル代数の表現論とその可積分系への応用

研究課題名（英文）Representation theory of elliptic quantum toroidal algebras and its application to integrable systems

研究代表者

大島 和幸 (OSHIMA, KAZUYUKI)

愛知工業大学・工学部・教授

研究者番号：30547980

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究においてアフィン量子群のアフィン化である量子トロイダル代数の楕円類似を導入した。アフィン量子群は可解格子模型や可積分系において重要な役割を果たしている。本研究において楕円量子トロイダル代数のいくつかの表現を構成し、可積分系への応用を調べた。量子トロイダル代数は一般のリー代数に付随して定義することができるが、特にA型の場合量子変形パラメータの他にもう一つパラメータが入り、興味深い研究対象となっている。その楕円変形は、楕円変形パラメータを含めパラメータが3つ入ることになり、5次元、6次元ゲージ理論との関係を示すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

可解格子模型や可積分系で重要な役割を果たしているアフィン量子群の自然な拡張を考えることは重要である。本研究はアフィン量子群のアフィン化である量子トロイダル代数と、アフィン量子群の楕円化である楕円量子群との両面を併せ持った自然な拡張である。楕円量子トロイダル代数においても、有限次元表現やフォック表現など基本的な表現を構成することが可能であり、それらのテンソル積上に頂点作用素を構成することによりW代数を導出するなど、可積分系への応用が可能であることを示した。

研究成果の概要（英文）：We introduce an elliptic analogue of quantum toroidal algebras which are an affinization of quantum affine algebras. Quantum affine algebras play an important role in solvable lattice models or integrable systems. We study some applications for integrable systems using the representation theories of the elliptic quantum toroidal algebras. Quantum toroidal algebras can be defined for any simple Lie algebras, among others, quantum toroidal algebra for type A is most interesting because it admits quantum deformation parameter and one more parameter. Considering an elliptic analogue, the elliptic quantum toroidal algebra for A type has 3 parameter including the elliptic deformation parameter, which we show the relation between the elliptic quantum toroidal algebra and 5 dimensional or 6 dimensional Gauge theories.

研究分野：Mathematical Physics

キーワード：Elliptic analogue Quantum toroidal algebra representaiton vertex operator W algebra

1. 研究開始当初の背景

トロイダル代数はアフィンリー代数のアフィン化として実現される。量子トロイダル代数は1995年にギンズブルグ・カプラノフ・バセロによって導入された代数であり、半単純リー代数に2変数ローラン多項式環をテンソルして、2次元中心拡大を行ったものの q 変形である。量子トロイダル代数は一般の半単純リー代数に対して定義されるが、 gl 型の場合は特に変形パラメータが q 以外にもう一つ入るので、興味深く研究されている。アフィン量子群は量子カツ・ムーディ代数であるのに対して、量子トロイダル代数はもはや量子カツ・ムーディ代数ではなく、表現論がアフィン量子群に比較して難しい。しかしながら量子トロイダル代数は、2000年2010年代にかけて、 gl_1 量子トロイダル代数とマクドナルド関数や W 代数、ネクラソフの分配関数などの関係がさまざまな文脈から見だされてきた。さらに本研究を開始する2010年代後半から2020年代には gl 型の量子トロイダル代数が6次元のゲージ理論に現れるなど、物理的な側面から活発な研究が進められていた。表現論的な側面についても、ボゾン表現やベクトル表現が得られている。ただし、量子トロイダル代数の楕円変形については gl_1 の場合にいくつかの研究があるのみでほとんど何も分かっていない状況であった。申請者は当時、アフィン量子群の楕円化である楕円量子群を研究しており、その経験から量子トロイダル代数の楕円化も、特に gl_1 に限定することなく形式上は可能であると考えた。楕円量子群は8点模型の代数解析を可能にしたが、では、楕円量子トロイダル代数はどのような可解格子モデルもしくは可積分系の代数解析を可能にするのだろうか、という素朴な疑問から本研究の着想に至った。

2. 研究の目的

本研究の目的は一般の半単純リー代数、特にランク n が2以上の gl_n に付随する量子トロイダル代数の楕円化「楕円量子トロイダル代数」を定義し、その表現論を用いることによって、物理モデルおよび可積分系への応用を目指すことである。

量子トロイダル代数に関する研究は急速に進んでいるが、その楕円化についてはあまり調べられていない。しかしながら、アフィン量子群や楕円量子群との類似性から種々の量が計算可能であり、さまざまな可積分系との関係が期待できる。

3. 研究の方法

本研究の開始以前に、申請者はアフィン量子群の楕円変形である楕円量子群を研究していた。その過程において、 A 型楕円量子群の量子 Z 代数を求め、既約表現を構成し、 W 代数を導いた。また B 型楕円量子群を定義し、それに対する有限次元表現、レベル1表現を構成し、それらのテンソル積上に頂点作用素を構成するなどの研究を行った。量子トロイダル代数はアフィン量子群のアフィン化であり、量子トロイダル代数の楕円化については、アフィン量子群から楕円量子群を構成した方法と類似の方法で定義することが可能である。すなわち、量子トロイダル代数の生成元に属するボゾンを用いて補助的なカレントを作り、量子トロイダル代数の生成元の母関数を適当にひねることにより定義関係式にテータ関数が現れるようにする。このようにして閉じた代数系を作ることによって、楕円量子トロイダル代数は定義できる。

先行の量子トロイダル代数に対する結果を参考にしながら、楕円パラメータの極限をとると量子トロイダル代数の結果が復元できるように注意しながら、楕円変形された代数のホップ垂代数構造を定め、表現論を構成していく、という方法で研究を進めた。

4. 研究成果

2021年度は、ランク n が2以上の gl_n 量子トロイダル代数の楕円化を考察するための足掛かりとして、比較的先行研究が多い gl_1 量子トロイダル代数の楕円化「楕円 gl_1 量子トロイダル代数」を調べた。具体的には、まずレベル $(1, N)$ 表現およびレベル $(0, 1)$ 表現を構成し、そのテンソル積上の頂点作用素を構成し、変形 W 代数を導出した。また、頂点作用素の相関関数を計算し、5次元および6次元超対称性ゲージ理論の分配関数との関係を示すことができた。この結果は共同研究者の今野均氏との論文“Elliptic Quantum Toroidal Algebra $U_{\{q, t, p\}}(gl_{\{1, \text{tor}\}})$ and Affine Quiver Gauge Theories”にまとめ、Letters in Mathematical Physicsに掲載された。

2022 年度には、まず一般のリー代数に対する量子トロイダル代数に楕円化を定義し、ホップ亜代数の構造を定めた。そして楕円量子トロイダル代数の Z 代数を計算した結果、楕円量子トロイダル代数の Z 代数構造は、元の量子トロイダル代数の Z 代数に等しく、 Z 代数は楕円化の影響を受けないことが分かった。さらに A, D, E 型の場合 (simply-laced な場合) にレベル $(1, N)$ 表現を構成し、また、 gl_n の場合にレベル $(0, 1)$ 表現を構成した。この結果は 2022 年 8 月 29 日 ~ 9 月 2 日にフランス・リヨンで開催された研究集会「Recent Advances in Quantum Integrable Systems」において「Elliptic Quantum Toroidal Algebras and their Representations」というタイトルで発表した。

2023 年度は、一般のリー代数に対する楕円量子トロイダル代数に対する結果を今野均氏との論文「Elliptic Quantum Toroidal Algebras, Z -algebra Structures and Representations」にまとめ、Algebra and Representation Theory に掲載された。 gl_n 楕円量子トロイダル代数に対して、さらにレベル $(1, N)$ 表現とレベル $(0, 1)$ 表現のテンソル積上の頂点作用素を構成できたので、出版準備を進めている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|-----------------|
| 1. 著者名 Konno Hitoshi, Oshima Kazuyuki | 4. 巻 113 |
| 2. 論文標題 Elliptic quantum toroidal algebra $U_{\{q,t,p\}}(\mathfrak{gl}_{1 \text{tor}})$ and affine quiver gauge theories | 5. 発行年 2023年 |
| 3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics | 6. 最初と最後の頁 - |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-023-01650-6 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|---------------------------|
| 1. 著者名 Konno Hitoshi, Oshima Kazuyuki | 4. 巻 27 |
| 2. 論文標題 Elliptic Quantum Toroidal Algebras, Z-algebra Structure and Representations | 5. 発行年 2024年 |
| 3. 雑誌名 Algebras and Representation Theory | 6. 最初と最後の頁 1137 ~ 1175 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10468-024-10251-3 | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件/うち国際学会 1件）

| |
|---|
| 1. 発表者名 Kazuyuki Oshima |
| 2. 発表標題 Elliptic Quantum Toroidal Algebras and their representations |
| 3. 学会等名 Recent Advances in Quantum Integrable Systems (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|